Bures sur Yvette, le 9 mars 1974

Cher Looijenga,

J'ai parlé de ton problème à Tits et Don Zagier, et ils me l'ont résolu.

1. Transformations de Coxeter.

1.1 Soient W un groupe de Coxeter fini, D son diagramme de Dynkin, ~~et~~ V l'espace de sa représentation naturelle, et $R \subset W$ l'ensemble des réflexions. On appellera *racine* un vecteur unitaire orthogonal à un hyperplan radiciel. Si α est une racine, on note $V^+(\alpha)$ le demi-espace $\{x \mid (x,\alpha) \geq 0\}$, $M(\alpha) = \partial V^+(\alpha)$ le mur correspondant et $r_\alpha \in R$ la réflexion par rapport à $M(\alpha)$. *On suppose D irréductible $\neq A_1$.*

1.2. Soit c une transformation de Coxeter. Les faits suivants sont prouvés dans Bourbaki, Lie, V 6.2.

(i) Soient h l'ordre de c, et $P \subset V$ le plus grand sous-espace de V où c n'a que les valeurs propres $\exp(\pm 2\pi i/h)$. On a $\dim(P) = 2$. On oriente P pour que $c|P$ soit une rotation d'amplitude $\frac{2\pi}{h}$.

(ii) Aucun mur ne contient P. Les murs découpent sur P un système d'hyperplans radiciels de type $I_2(h)$.

(iii) Les murs de V contenant un même mur d de P sont deux à deux orthogonaux. On note $s(d)$ l'involution produit des réflexions correspondantes.

(iv) Soient C_0 une chambre de P, C l'unique chambre de V la contenant, ~~et~~ d_1^+ et d_2^+ les demi-droites limitant C_0, prises dans le sens direct, et d_1, d_2 les droites correspondantes. Alors, les murs de C sont ceux contenant d_1 ou d_2, et $c = s(d_2)\,s(d_1)$; $s(d_i)$ stabilise P, et sa restriction à P est la réflexion par rapport à d_i ; $c|P$ est donc une transformation de Coxeter de P.

Soient $c \in W$ un élément de Coxeter, et α une racine

<u>Corollaire</u> 1.3 (I) Avec les notations de 1.2 (IV), le groupe diédral W' engendré par $s(d_1)$ et $s(d_2)$ est le stabilisateur de P. C'est aussi le stabilisateur de $\{c, c^{-1}\}$. Il agit fidèlement sur P, et sa restriction à P est le groupe de Weyl de P.
Le centralisateur de c est le sous-groupe $\langle c \rangle$ engendré par c.

(II) Il existe une chambre C, dont α soit racine simple, et une énumération $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ des racines simples de C, avec $\alpha = \alpha_1$, telle que $c = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_\ell}$

(III) Pour C comme en (II), la droite d intersection des murs $M(\alpha_i)$ $(\alpha_i \neq \alpha)$ est le sous-espace de V fixe sous $r_\alpha c$. Elle ne dépend donc pas de C.
Le sous-groupe W_d de W qui fixe d ~~est~~ de Coxeter, engendré par les r_{α_i} $(\alpha_i \neq \alpha)$; sa représentation naturelle est sur V/d. $r_\alpha c \in W_d$ est une transformation de Coxeter de W_d.

(IV) Le sommet de D correspondant au mur $M(\alpha)$ de C (C comme en (II)) est indépendant de C. On le note $\bar{\alpha}$

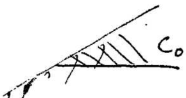
(V) $\langle c \rangle$ agit librement sur l'ensemble des racines. Deux racines sont dans la même orbite si et seulement si elles ont même image dans D.

(VI) Soient C_0 et C comme en 1.2 (IV). Pour chaque mur M de C, soit $\alpha = \alpha(M)$ la racine ~~correspondant~~ telle que $M = M(\alpha)$ et que $V^+(\alpha)$ contienne (resp ne contienne pas) C si M passe par d_2 (resp d_1). Alors, $\{\alpha(M) \mid M \text{ mur de } C\}$ est une section de l'ensemble des orbites de $\langle c \rangle$, et $\overline{\alpha(M)}$ est la classe dans D du mur M de C.

(i) α) W' stabilise $\{c, c^{-1}\}$: $s(d_i)\, c\, s(d_i)^{-1} = c^{-1}$

β) $\{c, c^{-1}\}$ détermine P ; le stabilisateur de $\{c, c^{-1}\}$ stabilise donc P

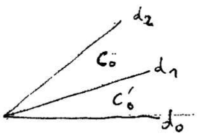
γ) Un élément $w \in W$ qui stabilise une chambre C_0 de P est l'identité (car $C_0 \subset$ une seule chambre). W' est le groupe de Weyl de P par 1.2 (iv). Puisque W' est transitif sur les chambres de P, c'est le stabilisateur de P tout entier. Enfin, $\langle c \rangle$ est le centralisateur de c dans W', donc dans W.



(ii) On prend ~~la~~ chambre C_0 de P de mur $M(\alpha) \cap P$, telle que, avec les notations de 1.2 (iv), $M(\alpha) \cap P = d_2$ et $V^+(\alpha) \supset C_0$. Puisque $c = s(d_2)\, s(d_1)$ ce choix convient.

(iii) On a $r_\alpha c = r_{\alpha_2} \cdots r_{\alpha_\ell}$; la première assertion de (iii) en résulte facilement. Que $r_\alpha c$ soit de Coxeter se voit en prenant C comme en (ii).

(iv) On va vérifier que $\bar{\alpha}$ ne dépend que de α et d : si C' et C'' sont deux chambres dont α est racine simple, et telles que la demi-droite apposée au mur $M(\alpha)$ soit $d^+ = d \cap V^+(\alpha)$, il existe $w \in W_d$ envoyant C' sur C'' (les chambres contenant d^+ correspondent biunivoquement à celles de V/d). Puisque w respecte d, il respecte $M(\alpha)$, et (iv) en résulte.



(vi) Écrivant $c = s(d_2)\, s(d_1)$, on voit aussitôt que $\overline{\alpha(M)}$ = classe du mur M de C pour $M \supset d_2$. Soit $C_0' = s(d_1)(C_0)$, d'où $C' = s(d_1)\, C$, et $d_0 = s(d_1)(d_2)$. On a $c = s(d_1)\, s(d_0)$. Pour $M \supset d_1$, $\overline{\alpha(M)}$ est donc la classe dans D du mur M de C' ; puisque $s(d_1)$ respecte M, c'est aussi la classe du mur M de C.

Il est clair que les $\alpha(M)$ forment une section de l'ensemble des orbites de $\langle c \rangle$ dans l'ensemble des racines et que l'action de $\langle c \rangle$ est libre [on se ramène au cas diédral]. Puisque $\overline{c\alpha} = \bar{\alpha}$ (transport de structure), (v) en résulte.

__Remarque 1.4.__ Ne supposons plus D irréductible $\neq A_1$. Les assertions (ii), (iii), (iv) valent encore. La deuxième partie de (v) vaut en remplaçant $\langle c \rangle$ par le centralisateur de c. On notera $h(D)$ l'ordre de ce centralisateur :

$$h(\amalg D_i) = \prod h(D_i) .$$

__Corollaire 1.5__ Soient W un groupe de Coxeter fini et $c \in W$ un élément de Coxeter. Soit Ξ_c (resp Ξ'_c) ~~les~~ l'ensemble des suites de l racines $\alpha_1 \cdots \alpha_\ell$ (resp des suites de l réflexions $r_1 \cdots r_\ell$) (ℓ = rang) telles que $r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_\ell} = c$ (resp $r_1 \cdots r_\ell = c$). Les nombres $F(D) = \# \Xi_c$ et $F'(D) = \# \Xi'_c$ ne dépendent que de D, et vérifient $F(D) = 2^\ell F'(D)$. On a, pour D irréductible,

$$F(D) = h(D) \sum_{i \in D} F(D - \{i\}) ,$$

d'où

$$F'(D) = \frac{h(D)}{2} \sum_{i \in D} F'(D - \{i\})$$

D'après 1.3 (iii), on a en effet

$$F(D) = \sum_{\alpha \text{ racine}} F(D - \{\bar{\alpha}\}) ,$$

et on applique 1.3 (v), complété par 1.4.

__Remarque 1.6__ On a $F(\emptyset) = F'(\emptyset) = 1$. ~~Par induction à partir de là, ou directement, on trouve que~~ Pour des diagrammes D_i de rang ℓ_i, et $D = \amalg D_i$, $\ell = \Sigma \ell_i$, on a

$$F(D) = \frac{\ell!}{\prod \ell_i!} \prod F(D_i) ,$$

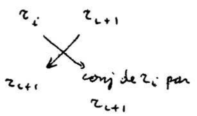
et de même pour F'. ~~Pour D irréductible, et $h_i(D)$ = Coxeter de la~~ ~~$F(D) = \sum_i h_i(D) F(D - \{i\})$~~

__Remarque 1.7__ Pour c fixé, on a défini une application $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ de l'ensemble des racines dans D. On a $\overline{-\alpha}$ = transformé de $\bar{\alpha}$ par l'involution d'opposition. Dès lors, notant D' le quotient de D par l'involution d'opposition, $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ passe au quotient et définit $r \mapsto \bar{r} : R \to D'$

2. Action du groupe des tresses

Soient W un groupe de Coxeter fini, D son diagramme de Dynkin, D' le quotient de D par l'involution d'opposition, ℓ le rang de W, c une transformation de Coxeter et Ξ'_c comme en 1.5. Soit Br le groupe des tresses à ℓ brins, de générateurs canoniques $(w_i)_{1 \leq i \leq \ell-1}$. On le fait agir sur Ξ'_c par

$$w_i : (r_1 \dots r_\ell) \longmapsto (r_1, \dots r_{i-1}, r_{i+1}, r_{i+1} r_i r_{i+1}, r_{i+2}, \dots, r_\ell)$$



Théorème 2.1 Br agit transitivement sur Ξ'_c

On procède par récurrence sur ℓ. Si D est somme disjointe de diagrammes D_i, et si le théorème est vrai pour les D_i, il l'est pour D. Ceci nous ramène à supposer D irréductible. Les cas $D = \emptyset$ ou A_1 sont triviaux.

Lemme 2.1.1 Soient $\sigma' = (r'_1 \dots r'_\ell)$ et $\sigma'' = (r''_1 \dots r''_\ell)$ dans Ξ'_c. Si $r'_1 = r''_1$, alors σ' et σ'' sont dans la même orbite de Br.

Soit d le sous-espace de V fixe par $r'_1 c$. On applique l'hypothèse de récurrence à W_d et à $\Xi'_{r'_1 c}$ (1.3 (iii))

Disons que deux racines α et β sont ~~assez~~ équivalentes s'il existe $\sigma' = (r'_1 \dots r'_\ell)$ et $\sigma'' = (r''_1 \dots r''_\ell)$ dans Ξ_c, conjugués sous Br, et tels que $r'_1 = r_\alpha$ et $r''_1 = r_\beta$. Il reste à prouver que deux racines sont toujours équivalentes.

(a) α et $c^{-1}\alpha$ sont équivalentes : on prend $\sigma = (r_\alpha, r_2 \dots r_\ell)$ dans Ξ'_c (1.3 (iii)) ;

on a $\quad w_1 \dots w_{\ell-1} w_{\ell-1} \dots w_1 \ (\sigma) = (c^{-1} r_\alpha c, \dots)$

(b) α et $-\alpha$ sont équivalents : $r_\alpha = r_{-\alpha}$

D'après 1.3 (v) et 1.7, il existe donc une relation d'équivalence sur D' telle que $\alpha \sim \beta$ si et seulement si $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ ont des images équivalentes sur D'. ~~Pa~~ Puisque W agit trivialement sur D^*, cette équivalence ne dépend pas du choix de c. On note $\sim$ l'équivalence image réciproque sur D

(c) Pour i, j deux sommets non liés de D, on a $i \sim j$

On prend $c = r_i \, r_j \cdots$ (produit de reflexions fondamentales) on a

$$w_1 \,(r_i, r_j, \ldots) = (r_j, r_i, \ldots)$$

et $\bar{\alpha}_i = i$, $\bar{\alpha}_j = j$

(d) Pour i, j comme suit :  (i pendant), on a $i \sim j$

On prend $c = r_j \, r_i \cdots$ (produit de réflexions fond.)

$$w_1 \,(r_j, r_i, \ldots) = \underbrace{(r_i, r_i r_j r_i, \ldots)}_{\text{reflexions fondamentale pour la chambre } r_i C \text{, car } r_i \text{ commute à} \ldots}$$

et $\bar{\alpha}_j = j$, $\bar{\alpha}_i = i$ (le voir avec la chambre $r_i C$)

De (c) et (d) résulte l'équivalence de tous les sommets, et le théorème.

3. Calcul de $F'(D)$

Corollaire 3.1 $\quad F'(A_\ell) = (\ell+1)^{\ell-1}$

Dans ce cas, tu as en effet démontré directement ta conjecture, tandis que par 2.1, Ξ_c ne forme qu'une orbite sous Br, et on applique ton calcul de l'indice.

C'est aussi équivalent à la formule que tu indiques sur les arbres : pour qu'un produit de ℓ transposition dans un ensemble a $\ell+1$ éléments soit un $(\ell+1)$-cycle, il faut et suffit que le graphe obtenu en liant les points dans ces transpositions soit un arbre. Puisqu'il y a $\ell!$ $(\ell+1)$-cycles, et $\ell!$ ordres totaux sur un arbre donné, on a

$$F'(A_\ell) = \#\{\text{arbres de support un ensemble à } (\ell+1) \text{ éléments donné}\}$$

3.2. Le corollaire 1.5 fournit

$$F'(A_\ell) = \frac{\ell+1}{2} \sum_{\substack{i+j=\ell-1 \\ i,j \geqslant 0}} \frac{\ell-1!}{i!\,j!} F'(A_i)\, F'(A_j) \quad , \text{ soit}$$

$$2\ell \, \frac{F'(A_\ell)}{\ell!} = (\ell+1) \sum_{i+j=\ell-1} \frac{F'(A_i)}{i!} \, \frac{F'(A_j)}{j!}$$

(3.2.1) En terme de la série génératrice $a(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{F'(A_i)}{i!} t^{i+1}$, ceci s'écrit

$$2t\, \partial_t\left(\frac{a}{t}\right) = \partial_t(a^2) \quad , \quad \text{soit}$$

$$da - a\,\frac{dt}{t} = a\, da$$

(3.2.2) $\quad \frac{da}{a} - da = \frac{dt}{t} \qquad$ et puisque $a'(0) = 1$

(3.2.3) $\quad a \cdot e^{-a} = t \qquad$ Ceci peut aussi se voir sur l'interprétation arborescente : on exprime que si on ôte un sommet à un arbre, on obtient une somme d'arbres, chacun avec un sommet marqué (celui lié à a) _ et réciproquement

Corollaire 3.3 $\quad F'(B_\ell) = \ell^\ell$

Ici, W est le sous-groupe de $GL(\ell, \mathbb{R})$ qui respecte une bibase $\pm \varepsilon_i$.

$|W| = 2^\ell . \ell!$

$h = 2\ell$ $\quad$ par ex : c : $\varepsilon_1 \to \varepsilon_2 \to \cdots \to \varepsilon_\ell \to -\varepsilon_1$

nombre d'éléments de Coxeter : $\quad 2^{\ell-1} (\ell-1)!$

Pour qu'un produit de ℓ reflexions soit de Coxeter, il faut et suffit que

(α) une et une seule d'entre elles est du type $\quad (\varepsilon_i \to -\varepsilon_i,\ \varepsilon_j \text{ fixe})$

(β) le graphe suivant : une arête par chacune des reflexions, qui joint i à j pour reflexion $\varepsilon_i \to \pm \varepsilon_j$ – est un arbre.

Dès lors, le nombre de suites de ℓ réflexions dont le produit est de Coxeter est :

$$\#\text{arbres} . \#\text{ordre total sur les arêtes de l'arbre} . \underbrace{2^{\ell-1}}_{[\varepsilon_i \to \pm \varepsilon_j]} . \underbrace{\ell}_{\substack{\text{indice de} \\ \text{la reflexion } (\alpha)}} . \underbrace{\ell}_{\text{sa place}}$$

$$= \ell^{\ell-2} . (\ell-1)! . 2^{\ell-1} . \ell^2$$

d'après 3.1

et le cardinal de chaque Ξ'_c est donc $\quad \dfrac{\ell^{\ell-2} (\ell-1)!\, 2^{\ell-1} \ell^2}{2^{\ell-1} . (\ell-1)!} = \ell^\ell$

3.4 $\quad$ Le corollaire 1.5 fournit [on pose $B_0 = \emptyset$, $B_1 = A_1$] pour $\ell \geq 1$

$$F'(B_\ell) = \ell \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j = \ell-1}} \frac{(\ell-1)!}{i!\, j!} F'(A_i) F'(B_j) \quad , \text{ soit}$$

$$\frac{F'(B_\ell)}{\ell!} = \sum_{i+j=\ell-1} \frac{F'(A_i)}{i!} \frac{F'(B_j)}{j!}$$

En terme de la série génératrice

(3.4.1) $$b(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{F'(B_i)}{i!} t^i \quad ,$$

ceci s'écrit

$$b(t) = a(t)\, b(t) + 1 \quad , \text{ i.e.}$$

(3.4.2) $$b(t) = \frac{1}{1 - a(t)}$$

<u>Corollaire</u> 3.5 $\quad F'(D_\ell) = 2\,(\ell-1)^\ell \quad . \qquad (\ell \geq 2)$

Soit la série génératrice

$$d(t) = 1 + \sum_\ell \frac{F'(D_\ell)}{2.\ \ell!}\, t^\ell \quad .$$

Le corollaire 1.5 fournit

$$F'(D_\ell) = (\ell-1)\left[\sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j=\ell-1\\ j\geq 2}} \frac{(\ell-1)!}{i!\,j!}\, F'(A_i)F'(D_j) \qquad + 2\,F'(A_{\ell-1})\right] ,$$

. .

$$\ell\,\frac{F'(D_\ell)}{2.\ \ell!} = (\ell-1)\left[\sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j=\ell-1\\ j\geq 2}} \frac{F'(A_i)}{i!}\,\frac{F'(D_j)}{j!} \quad + \frac{F'(A_{\ell-1})}{(\ell-1)!}\right]$$

multipliant par $t^{\ell-1}$, et prenant la somme, cela donne

(3.5.1) $\qquad \partial_t d = t\,\partial_t\left(\dfrac{a\,d}{t}\right) \qquad$, soit

$$\partial_t d = \partial_t d\,.\,a + d\,.\,t\,\partial_t\left(\frac{a}{t}\right) \qquad , \quad \text{où } t\,\partial_t\left(\frac{a}{t}\right) = a\,.\,\partial_t a$$

$$\partial_t d\,(1-a) = d\,.\,a\,.\,\partial_t a$$

$$\frac{\partial_t d}{d} = \frac{a\,\partial_t a}{1-a} = \partial_t\left(-a - \log(1-a)\right)$$

$$d = \frac{e^{-a}}{1-a}$$ (à une constante près, et le terme constant est bon)

(3.5.2) $\qquad d = \dfrac{t}{a(1-a)} \qquad : \qquad \dfrac{a\,d}{t} = b\ .$

Reportant dans (3.5.1), on trouve

$$\partial_t d = t\,\partial_t b \qquad , \text{ i.e. } 3.5$$

J'ai aussi vérifié que $F'(E_6) = 2^9\, 3^4$, $F'(E_7) = 2.3^{12}$, et, avec l'aide d'une machine, $F'(E_8) = 2.3^5.5^7$ ~~Je n'ai pas eu le courage de calculer E_7, E_8~~. ~~Modulo cette vérification~~, On a prouvé la conjecture.

4. Compléments

4.1. Le résultat suivant précise 1.3 (ii).

Soient W un groupe de Coxeter fini de diagramme de Dynkin D irréductible. Soient $\leq$ un ordre total sur D, et α une racine. Pour chaque chambre C dont α est racine simple, soit $\alpha_1 \cdots \alpha_\ell$ les racines simples associées à C, dans l'ordre $\leq$, et soit

$$c(C) = r_\alpha \; r_{\alpha_1} \cdots \hat{r}_\alpha \cdots r_{\alpha_\ell}$$

(le produit des r_{α_i} dans l'ordre $\leq$, sauf que r_α est mis devant).

<u>Proposition</u> 4.2 L'application $C \mapsto c(C)$ de l'ensemble des chambres dont α est racine simple dans l'ensemble des transformations de Coxeter est bijective

L'injectivité se prouve comme 1.3 (iv) : avec les notations de loc. cit., soit $w \in W_\alpha$ envoyant C' sur C''. Il respecte α et l'ordre des murs, donc respecte $c(C') = c(C'')$. Puisque w centralise une transformation de Coxeter et fixe une racine, $w = 1$ (1.3 (i) et (v))

Il reste à compter

(a) Il y a $|W|/h$ transformations de Coxeter (1.3 (i))

(b) Si l_α est le nombre de sommets du diagramme de Dynkin correspondant à racines conjuguées à α, alors α a $l_\alpha h$ conjugués sous W (1.3 (vi)). Le nombre de couples (racine β conjuguée à α ; chambre dont β est racine simple) est $W . l_\alpha$; le nombre de chambres dont α est racine simple est donc $\frac{|W|}{h}$.

Bien à toi

P. Deligne