LE THÉORÈME DES NOMBRES PREMIERS ET LA TRANSFORMATION DE FOURIER

par

Jean-Benoît Bost

1. Introduction

1.1. Le théorème des nombres premiers

Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit

$$\pi(x) := \#\{p \in \mathbb{P} \mid p \leqslant x\} \tag{1.1.1}$$

le nombre des nombres premiers inférieurs ou égaux à x. Le théorème des nombres premiers est l'énoncé suivant, établi indépendamment par Hadamard et de la Vallée-Poussin en 1896 :

Théorème 1.1. *Lorsque x tend vers $+\infty$, on a :*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}. \tag{1.1.2}$$

Leur démonstration repose sur les propriétés de la fonction ζ de Riemann pour des *valeurs complexes* de l'argument. Rappelons que cette fonction est définie sur le demi-plan $\operatorname{Re} s > 0$ par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Le lien entre les propriétés analytiques de la fonction ζ et la répartition des nombres premiers est établi par l'expression de $\zeta(s)$ comme *produit eulérien* :

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \quad \text{si } \operatorname{Re} s > 1$$

(*cf.* section 2 *infra*). Cette identité montre en outre que $\zeta(s)$ ne s'annule pas sur le demi-plan $\operatorname{Re} s > 1$. Un point essentiel de la démonstration de

Hadamard et de la Vallée-Poussin est que la fonction ζ admet un prolongement méromorphe sur un voisinage du demi-plan fermé $\operatorname{Re} s \geqslant 1$, admettant 1 comme seul pôle et *ne s'annulant pas* sur la droite $\operatorname{Re} s = 1$.

L'existence d'un prolongement méromorphe de ζ à $\mathbb{C}$ tout entier avait été établi par Riemann dès 1859, dans son célèbre article *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, où il mettait aussi en évidence — quoique de façon largement conjecturale — le lien étroit entre la distribution des nombres premiers et les zéros de ζ dans le plan complexe.

À cette date, la répartition des nombres premiers avait déjà suscité d'importants travaux, rigoureux ou conjecturaux, qui ne faisaient pas appel à des méthodes d'analyse complexe. Ainsi, dès 1737, Euler avait fait usage de la fonction ζ, comme fonction d'une variable réelle, pour étudier la suite des nombres premiers. L'équivalent de $\pi(x)$ donné par le théorème des nombres premiers avait été conjecturé au cours des dernières années du XVIII$^{\text{e}}$ siècle par Gauss et Legendre. Enfin, quelques années avant le mémoire de Riemann, Tschebyschef avait établi par des moyens élémentaires l'existence de deux constantes A et B, $0 < A < 1 < B$, telles que, pour x assez grand, on ait :

$$A\frac{x}{\log x} < \pi(x) < B\frac{x}{\log x}.$$

Il fallut toutefois attendre le développement de la théorie des fonctions d'une variable complexe et les dernières années du XIX$^{\text{e}}$ siècle pour parvenir à une démonstration complète de (1.1.2).

Dans les pages qui suivent, nous présentons une démonstration du théorème des nombres premiers dont le schéma est dû à J.-P. Kahane ([**Kah96**] et [**Kah97**]). Comme les démonstrations originales de Hadamard et de la Vallée-Poussin, elle fait usage du prolongement méromorphe de ζ sur un voisinage du demi-plan fermé $\operatorname{Re} s \geqslant 1$. Elle fait de plus appel à quelques notions fondamentales sur la transformation de Fourier et les distributions tempérées. Cela la rend en un sens moins élémentaire, mais aussi, nous semble-t-il, plus conceptuelle. La non-annulation de ζ sur la droite $\operatorname{Re} s = 1$ y apparaît notamment comme une conséquence naturelle des propriétés des transformées de Fourier des mesures positives.

1.2. Variantes et conséquences

Notons $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$ la suite croissante des nombres premiers. Dans la suite, si $F(p)$ désigne une expression dépendant d'un nombre premier p, nous écrirons souvent

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} F(p) \qquad (\text{resp. } \prod_{p \in \mathbb{P}} F(p))$$

pour la série (resp. le produit infini)

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(p_n) \quad (\text{resp. } \prod_{n=1}^{\infty} F(p_n)).$$

Le théorème des nombres premiers admet en fait bien des reformulations, dont l'équivalence découle de raisonnements élémentaires. Citons deux d'entre elles :

Théorème 1.2. *Chacune des assertions suivantes est équivalente au théorème des nombres premiers (1.1.2) :*

(i) *Lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, on a :*

$$p_n \sim n \log n. \tag{1.2.1}$$

(ii) *Lorsque x tend vers $+\infty$, on a :*

$$\Theta(x) := \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leqslant x}} \log p \sim x. \tag{1.2.2}$$

Démonstration. (1.1.2) $\Longrightarrow$ (1.2.1). De (1.1.2), on tire :

$$\log \pi(k) \sim \log k \qquad (k \to +\infty),$$

puis

$$\pi(k) \log \pi(k) \sim k.$$

En faisant $k = p_n$, on obtient (1.2.1).

(1.2.1) $\Longrightarrow$ (1.1.2). Pour tout $x \in [2, +\infty[$, on a :

$$p_{\pi(x)} \leqslant x < p_{\pi(x)+1}.$$

D'après (1.2.1), lorsque x tend vers $+\infty$, on a :

$$p_{\pi(x)} \sim \pi(x) \log \pi(x)$$

et

$$p_{\pi(x)+1} \sim (\pi(x) + 1) \log(\pi(x) + 1) \sim \pi(x) \log \pi(x),$$

et par conséquent :

$$x \sim \pi(x) \log \pi(x).$$

Comme plus haut, cela implique que

$$\log x \sim \log \pi(x)$$

et enfin que

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

(1.1.2) $\Longrightarrow$ (1.2.2). Nous allons utiliser la formule de sommation suivante, qui nous servira à nouveau plus loin :

Lemme 1.3. *Pour toute suite de nombres complexes* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et tout* $N \in \mathbb{N}^*$*, on a :*

$$\sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leqslant N}} a_p = \pi(N)a_N + \sum_{n=1}^{N-1} \pi(n)(a_n - a_{n+1}). \tag{1.2.3}$$

En effet,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leqslant N}} a_p &= \sum_{k=1}^{N}(\pi(k) - \pi(k-1))a_k \\ &= \pi(N)a_N + \sum_{k=1}^{N-1} \pi(k)a_k - \sum_{k=2}^{N} \pi(k-1)a_k.\end{aligned}$$

Appliquée à $a_n = \log n$, l'identité (1.2.3) devient :

$$\Theta(N) = \pi(N)\cdot\log N - \sum_{n=1}^{N-1} \pi(n)\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big). \tag{1.2.4}$$

D'après (1.1.2),

$$\pi(N)\cdot\log N \sim N \qquad (N\to+\infty) \tag{1.2.5}$$

tandis que

$$\pi(n)\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big) \sim \frac{1}{\log n} \qquad (n\to+\infty);$$

Comme

$$\sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{\log n} \sim \frac{N}{\log N} = o(N) \qquad (N\to\infty),$$

on a donc

$$\sum_{n=1}^{N-1} \pi(n)\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = o(N). \tag{1.2.6}$$

L'équivalent (1.2.2) découle de (1.2.4), (1.2.5) et (1.2.6).

(1.2.2) $\Longrightarrow$ (1.1.2). Jointe à (1.2.2), la majoration évidente

$$\Theta(x) \leqslant \pi(x)\cdot\log x$$

montre que

$$\liminf_{x\to+\infty} \pi(x)\frac{\log x}{x} \geqslant 1.$$

Par ailleurs, pour tout $\eta \in]0,1[$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, il vient :

$$\sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leqslant x^\eta}} \log p \leqslant \pi(x^\eta)\log(x^\eta) \leqslant x^\eta \log x.$$

Compte tenu de (1.2.2), cela implique que, pour tout $\eta \in]0,1[$:

$$\sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ x^\eta<p\leqslant x}} \log p \sim x \qquad (x \to +\infty) \tag{1.2.7}$$

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ x^\eta<p\leqslant x}} \log p \geqslant [\pi(x) - \pi(x^\eta)] \log x^\eta \geqslant \eta\pi(x)\log x - \eta x^\eta \log x. \tag{1.2.8}$$

De (1.2.7) et (1.2.8), il découle :

$$\eta \limsup_{x\to+\infty} \pi(x)\frac{\log x}{x} \leqslant 1,$$

puis, comme $\eta \in]0,1[$ est arbitraire :

$$\limsup_{x\to+\infty} \pi(x)\frac{\log x}{x} \leqslant 1. \qquad \square$$

À partir du théorème des nombres premiers, on établit au moyen d'arguments élémentaires des résultats remarquables concernant des séries définies au moyen de la suite des nombres premiers. Par exemple, en utilisant (1.1.2) et la formule de sommation (1.2.3) — ou directement (1.2.2) — le lecteur montrera sans difficulté (*cf.* aussi 2.2 *infra*) :

Théorème 1.4. *Lorsque x tend vers $+\infty$, on a :*

$$\sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leqslant x}} \frac{\log p}{p} \sim \log x \quad \textit{et} \quad \sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leqslant x}} \frac{1}{p} \sim \log\log x.$$

Ces équivalents peuvent en fait être établis directement par des manipulations élémentaires, sans avoir recours au théorème des nombres premiers, et ont été démontrés de la sorte en 1874 par Mertens (voir par exemple [**HW79**, §§ 22.6 et 22.7]).

Remarquons enfin que pour tout $\lambda \in]1,\infty[$, le théorème des nombres premiers montre que, lorsque x tend vers $+\infty$, on a :

$$\pi(\lambda x) \sim \frac{\lambda x}{\log x}$$

et donc

$$\pi(\lambda x) - \pi(x) \sim \frac{(\lambda - 1)}{\log x}.$$

On en déduit :

Proposition 1.5. *Pour tout $\lambda \in]1,+\infty[$, il existe $x(\lambda) \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \geqslant x(\lambda)$, l'intervalle $]x,\lambda x]$ contienne un nombre premier.*

Pour λ suffisamment grand (par exemple $\lambda = 2$), cet énoncé peut s'établir au moyen des techniques élémentaires de Tschebyschef. Pour λ « très proche de 1 », sa démonstration semble nécessairement faire appel à des techniques plus sophistiquées.

1.3. Prérequis et notations

Ainsi que nous l'avons déjà mentionné, la démonstration du théorème des nombres premiers présentée plus loin fait appel aux résultats de base de la théorie de la transformation de Fourier et des distributions tempérées. En rédigeant ces pages, nous nous sommes efforcés de les rendre accessibles à tout étudiant maîtrisant les rudiments de la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe, qui aurait en outre suivi un premier cours de théorie des distributions. Une bonne familiarité avec [**Sch61**] chapitre 5, [**Rud73**] chapitres 7 et 9, [**Bon01**] chapitre 9, ou [**Zui02**] chapitre 10 constitueraient par exemple une préparation suffisante.

Ce parti pris nous a conduit à adopter un style d'exposition très détaillé. En conséquence, énoncé et démonstration de bon nombre de lemmes et de propositions auxiliaires devraient apparaître sans surprise à beaucoup de lecteurs : nous conseillons à ceux-ci de s'efforcer de les établir par eux-mêmes. Nous avons signalé par une astérisque * les démonstrations qui s'apparentent ainsi à de classiques exercices d'analyse.

Précisons enfin quelques points terminologiques et quelques conventions.

Rappelons qu'une *série de Dirichlet* est une série, dépendant d'une variable complexe s, de la forme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}, \tag{1.3.1}$$

où les coefficients a_n sont des nombres complexes. On vérifie aussitôt que, si la série (1.3.1) converge absolument pour une valeur $s = s_0$, alors elle converge normalement sur le demi-plan $\operatorname{Re} s \geqslant \operatorname{Re} s_0$ et définit ainsi une fonction holomorphe sur le demi-plan $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$. L'*abscisse de convergence absolue* σ de la série de Dirichlet (1.3.1) est par définition la borne inférieure des réels $\operatorname{Re} s$ où s est tel que (1.3.1) converge absolument ; la série (1.3.1) définit alors une fonction holomorphe sur le demi-plan $\operatorname{Re} s > \sigma$.

L'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}$ (resp., des fonctions de Schwartz sur $\mathbb{R}$) sera noté $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).

La *transformée de Fourier* d'une distribution tempérée T sera notée $\widehat{T}$ ou $\mathcal{F}T$. Lorsque T appartient à $L^1(\mathbb{R})$, c'est par définition la fonction continue définie par :

$$\widehat{T}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) e^{-2\pi i x t} dx.$$

En général, elle est définie par l'égalité :

$$\widehat{T}(\varphi) = T(\widehat{\varphi}) \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Nous utiliserons aussi le fait que la transformée de Fourier $\widehat{f}$ d'une fonction f de $L^1(\mathbb{R})$ tend vers zéro à l'infini[(1)] (« lemme de Riemann-Lebesgue »).

1.4. Les démonstrations du théorème des nombres premiers

La prochaine section est consacrée à la démonstration de l'expression de $\zeta(s)$ comme produit eulérien et à ses premières conséquences. Cette expression permet notamment d'étudier le comportement de la série de Dirichlet

$$\zeta_{\mathbb{P}}(s) := \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s},$$

a priori définie et holomorphe sur le demi-plan $\operatorname{Re} s > 1$, lorsque $\operatorname{Re} s$ tend vers 1_+. On obtient ainsi que la limite

$$\zeta_{\mathbb{P}}(1 + it) := \lim_{\varepsilon \to 0_+} \zeta_{\mathbb{P}}(1 + \varepsilon + it)$$

existe pour tout t dans $\mathbb{R} \smallsetminus (\{0\} \cup Z)$, où l'on a posé

$$Z := \{t \in \mathbb{R}^* \mid \zeta(1 + it) = 0\},$$

et définit une fonction localement sommable sur $\mathbb{R}$ — en fait, une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \smallsetminus (\{0\} \cup Z)$ qui admet des singularités logarithmiques aux points de $\{0\} \cup Z$.

La suite du texte est consacrée à la démonstration du théorème des nombres premiers à proprement parler. Dans la section 3, on montre que la fonction

$$\ell(t) := \zeta_{\mathbb{P}}(1 + 2\pi i t)$$

est la transformée de Fourier de la distribution tempérée définie par la mesure

$$\mu := \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} \delta_{\log p},$$

(1) Cela découle de l'inégalité $\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^1}$, valable pour toute fonction f de $L^1(\mathbb{R})$, et du fait que les fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ vérifiant cette propriété sont denses dans $L^1(\mathbb{R})$. Elle est en effet satisfaite par les combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques d'intervalles compacts, ainsi que par les éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

puis que $\ell(t)/(1+2\pi it)$ est la transformée de Fourier de la distribution tempérée définie par la fonction bornée $(x \mapsto e^{-x}\pi(e^x))$. Autrement dit, pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\zeta_{\mathbb{P}}(1+2\pi it)dt = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}\widehat{\varphi}(\log p) \tag{1.4.1}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\frac{\ell(t)}{1+2\pi it}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(x)\,\frac{\pi(e^x)}{e^x}\,dx. \tag{1.4.2}$$

En appliquant l'identité (1.4.1) à des fonctions φ telles que $\widehat{\varphi} \geqslant 0$, on démontre dans la section 4 que l'ensemble Z des zéros de ζ sur la droite $\operatorname{Re} s = 1$ est vide et on en déduit que $\ell(t) - \log \frac{1}{it}$ définit une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Dans la section 5, on en déduit le théorème des nombres premiers en appliquant (1.4.2) à des fonctions φ_y de la forme $(t \mapsto e^{2\pi ity}\varphi(t))$ — ainsi $\widehat{\varphi}_y(x) = \widehat{\varphi}(x-y)$ — puis en faisant tendre y vers l'infini.

Les démonstrations originales de Hadamard et de la Vallée-Poussin prenaient elles aussi comme point de départ le développement de ζ en produit eulérien. Ils établissaient la non-annulation de ζ sur la droite $\operatorname{Re} s = 1$ par des arguments directs, superficiellement différents mais au fond de même nature : ils montraient en effet que, si ζ admettait un zéro en $1 + it_0$, où t_0 désigne un réel non nul, alors elle posséderait un pôle en $1 + 2it_0$ — ce qui n'est pas. Il paraît difficile de présenter cet argument de façon plus suggestive que ne le fait Hadamard dans la note où il annonce sa démonstration du théorème des nombres premiers, et nous l'avons reproduite en Appendice.

La non-annulation de ζ sur $\operatorname{Re} s = 1$ étant acquise — en fait sous une forme quantitative plus précise, spécifiant un voisinage de $\operatorname{Re} s \geqslant 1$ où ζ ne s'annule pas et une minoration explicite de ζ sur ce voisinage — Hadamard et de la Vallée-Poussin concluaient leur démonstration en exprimant la fonction $\pi(x)$ en fonction de $\zeta_{\mathbb{P}}$ ou, ce qui revient à peu près au même, de $\log \zeta$, grâce à une utilisation ingénieuse de la formule des résidus dont le principe remonte au moins à Riemann.

Observons que leurs démonstrations conduisent aussitôt à une estimation explicite du « reste » $\pi(x) - x/\log x$ dans le théorème des nombres premiers. Nous renvoyons au classique *Cambridge Tract* d'Ingham ([**Ing90**]) et à l'ouvrage de Tenenbaum ([**Ten95a**]-[**Ten95b**]) pour une présentation détaillée et des références sur cette approche et ses développements.

Vers 1930, suite à ses travaux d'analyse harmonique concernant les théorèmes tauberiens et leurs généralisation, Wiener obtint une nouvelle démonstration du théorème des nombres premiers, où les techniques d'analyse complexe étaient remplacées dans une large mesure par l'analyse harmonique de la fonction $(t \mapsto \zeta(1+it))$. Cette « philosophie » est menée à son terme dans la démonstration de Kahane que nous présentons plus loin. Cette démonstration trouve aussi son inspiration dans les travaux de Beurling sur les « nombres premiers généralisés » (voir par exemple [**Kah97**]).

La preuve de Wiener avait aussi l'intérêt, un peu académique à vrai dire, de ne faire appel qu'à la simple non-annulation de ζ sur le demi-plan $\operatorname{Re} s \geqslant 1$ et non plus à une version quantitative précisée. Une voie d'accès particulièrement rapide au théorème des nombres premiers est ainsi fournie aujourd'hui par les théorèmes tauberiens, dans le prolongement de l'approche de Wiener (voir par exemple [**Ten95a**]-[**Ten95b**], chapitre II.7). Signalons, dans le même esprit, la preuve de Newman ([**New80**]), qui ne fait appel qu'à des connaissances rudimentaires d'analyse complexe et est présentée de façon particulièrement accessible dans la littérature ([**Kor82**], [**Zag97**]).

Mentionnons enfin qu'Erdős et Selberg ont donné en 1949 une preuve « élémentaire » du théorème des nombres premiers, c'est-à-dire une preuve qui évite tout recours à la théorie des fonctions analytiques, mais n'utilise que des inégalités d'analyse réelle élémentaire. Nous renvoyons à [**HW79**] chapitre XXII et [**TMF97**]-[**TMF00**] chapitre IV pour d'agréables présentations de telles preuves.

Ces deux fort jolis livres contiennent par ailleurs de nombreuses informations sur la théorie des nombres et les nombres premiers, présentées de façon très accessibles. Pour de plus amples renseignements sur les aspects historiques de la fonction ζ de Riemann et du théorème des nombres premiers, on pourra aussi consulter [**Wei89**], [**BD96**] et [**Taz02**].

2. L'expression de ζ comme produit eulérien et ses conséquences

2.1. Le développement de ζ en produit eulérien

Le théorème suivant, dû à Euler, est une traduction analytique du fait que tout entier > 0 s'écrit de façon unique comme produit de puissances de nombres premiers.

Théorème 2.1. *Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que* $\operatorname{Re} s > 1$, *on a :*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \tag{2.1.1}$$

Le produit infini dans (2.1.1) est bien convergent, car

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \left|\frac{1}{p^s}\right| = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^{\operatorname{Re} s}} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}} < \infty$$

puisque $\operatorname{Re} s > 1$. Cette convergence est clairement uniforme sur tout demi-plan $\operatorname{Re} s \geqslant \eta$, si $\eta > 1$.

Démonstration. Soit s tel que $\operatorname{Re} s > 1$. Pour tout $p \in \mathbb{P}$, on a le développement en série absolument convergente :

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}}.$$

Il en découle que

$$\prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leqslant N}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n \in \mathcal{E}(N)} \frac{1}{n^s},$$

où $\mathcal{E}(N)$ désigne l'ensemble des entiers > 0 dont les diviseurs premiers valent au plus N. Comme

$$\mathcal{E}(N) \supset \{1, \ldots, N\},$$

il en découle que

$$\left| \zeta(s) - \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leqslant N}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \right| \leqslant \sum_{n > N} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}}.$$

On obtient (2.1.1) en faisant tendre N vers $+\infty$. $\square$

2.2. Un argument heuristique

La formule d'Euler met en évidence le lien entre la suite des nombres premiers et la fonction ζ de Riemann. Partant de sa démonstration, des arguments simples mais non rigoureux, qui pour l'essentiel remontent à Euler, suggèrent l'expression asymptotique (1.1.2) de $\pi(x)$.

En effet, la démonstration ci-dessus suggère que, lorsque N tend vers $+\infty$,

$$\sum_{n \leqslant N} \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leqslant N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}$$

sont « comparables ». Comme

$$\log \sum_{n \leqslant N} \frac{1}{n} = \log \log N + O(1)$$

et

$$\log \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leqslant N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \sum_{p \leqslant N} \frac{1}{p} + O(1),$$

cela suggère que

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leqslant N}} \frac{1}{p} \sim \log \log N \qquad (N \to +\infty).$$

Or, d'après la formule de sommation (1.2.3), on a :

$$\sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leqslant N}}\frac{1}{p}=\sum_{1\leqslant n\leqslant N-1}\frac{1}{n(n+1)}\pi(n)+O(1),$$

tandis que

$$\log\log N=\sum_{2\leqslant n\leqslant N-1}\frac{1}{n\log n}+O(1).$$

La comparaison des trois dernières relations suggère que

$$\frac{\pi(n)}{n(n+1)}\sim\frac{1}{n\log n},$$

c'est-à-dire :

$$\pi(n)\sim\frac{n}{\log n}.$$

2.3. La série de Dirichlet $\zeta_{\mathbb{P}}(s):=\sum_{p\in\mathbb{P}}p^{-s}$

Considérons la série de Dirichlet

$$\zeta_{\mathbb{P}}(s):=\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p^s}.$$

Son abscisse de convergence (absolue) est clairement $\leqslant 1$, et $\zeta_{\mathbb{P}}$ est donc une fonction holomorphe sur le demi-plan ouvert $\operatorname{Re}s>1$. La démonstration du théorème des nombres premiers va reposer sur les propriétés du prolongement de $\zeta_{\mathbb{P}}$ au demi-plan *fermé* $\operatorname{Re}s\geqslant 1$.

Pour étudier ces dernières, nous nous appuierons sur le corollaire suivant de l'expression de ζ comme produit eulérien :

Proposition 2.2. *Posons, pour tout* $s\in\,]1,+\infty[$,

$$g(s)=\log\zeta(s)-\zeta_{\mathbb{P}}(s).$$

La fonction g ainsi définie se prolonge en une fonction holomorphe sur le demi-plan $\{\operatorname{Re}s>1/2\}$, bornée sur le demi-plan $\{\operatorname{Re}s>\rho\}$ pour tout $\rho>1/2$.

Démonstration. Le développement eulérien de $\zeta(s)$ montre que, pour tout $s\in\,]1,+\infty[$,

$$g(s)=\sum_{p\in\mathbb{P}}\Big[-\log\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)-\frac{1}{p^s}\Big].\tag{2.3.1}$$

Observons que, pour tout $p\in\mathbb{P}$ et tout nombre complexe s tel que $\operatorname{Re}s>0$, le nombre $1/p^s$ appartient au disque ouvert $\mathring{D}(0;1)$ Nous allons montrer que, en désignant par log la détermination principale du logarithme sur le disque $\mathring{D}(1;1)$, la somme du membre de droite de (2.3.1) converge pour tout s tel que

$\operatorname{Re} s > 1/2$, normalement sur chaque demi-plan $\{\operatorname{Re} s \geqslant \rho\}$, $\rho > 1/2$. Cela établira la proposition.

Observons qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que, pour tout $u \in \mathbb{C}$,

$$|u| \leqslant 2^{-1/2} \Longrightarrow |\log(1-u) + u| \leqslant C|u|^2.$$

En effet $\log(1-u) + u$ est une fonction holomorphe de $u \in \mathring{D}(0;1)$, nulle ainsi que sa dérivée en 0.

Soit donc $\rho \in \,]1/2, +\infty[$. Pour tout s tel que $\operatorname{Re} s \geqslant \rho$ et tout $p \in \mathbb{P}$, il vient

$$\left|\frac{1}{p^s}\right| \leqslant p^{-\rho} \leqslant 2^{-1/2}$$

et donc

$$\left|\log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) + \frac{1}{p^s}\right| \leqslant C p^{-2\rho}.$$

Cela prouve la convergence normale requise, puisque $2\rho > 1$ et donc

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} p^{-2\rho} < +\infty. \qquad \square$$

On montre en fait facilement que $g(s)$ s'exprime par la série de Dirichlet :

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

où

$$a_n = \begin{cases} 1/k & \text{si} \quad n = p^k, \text{ avec } p \in \mathbb{P},\ k \text{ entier } \geqslant 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On observera que le fait que $g(s)$ reste borné lorsque $s \in \,]1, \infty[$ tend vers 1 admet déjà comme conséquence la divergence de la série $\sum_{p \in \mathbb{P}} p^{-1}$ (et *a fortiori* le fait que $\mathbb{P}$ est infini !). En effet, si elle convergeait, $\zeta_{\mathbb{P}}(s)$ serait borné lorsque s décrit $]1, +\infty[$, et donc $\log \zeta(s)$ serait borné lorsque $s \in \,]1, +\infty[$ tend vers 1, ce qui n'est pas (puisque $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ diverge).

Pour étudier $\zeta_{\mathbb{P}}$ dans le domaine complexe, nous utiliserons l'existence d'un prolongement méromorphe de ζ sur un voisinage ouvert du demi-plan $\operatorname{Re} s \geqslant 1$. Nous renvoyons le lecteur à [**Col**], chapitre I, pour une présentation détaillée des propriétés de prolongement analytique de la fonction ζ (voir notamment le Théorème I.1.3) et nous nous contenterons d'établir l'énoncé élémentaire suivant :

Proposition 2.3. *La fonction ζ admet un prolongement méromorphe de ζ sur le demi-plan $\operatorname{Re} s > 0$, holomorphe en dehors de 1, et admettant en 1 un pôle simple, de résidu 1.*

En d'autres termes, la différence

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1},$$

a priori définie et holomorphe sur le demi-plan $\operatorname{Re} s > 1$, admet un prolongement holomorphe sur le demi-plan $\operatorname{Re} s > 0$.

Démonstration. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} s > 1$. Pour étudier la somme $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ définissant $\zeta(s)$, il est naturel de considérer l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} x^{-s} dx.$$

D'une part, elle se calcule très simplement :

$$\int_1^{+\infty} x^{-s} dx = \left[\frac{x^{1-s}}{1-s}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{s-1}.$$

D'autre part, on peut écrire :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \int_1^{+\infty} x^{-s} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{-s} - \int_n^{n+1} x^{-s} dx \right).$$

Ainsi, en posant

$$\varphi_n(s) := n^{-s} - \int_n^{n+1} x^{-s} dx = \int_n^{n+1} (n^{-s} - x^{-s}) dx, \tag{2.3.2}$$

on obtient :

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(s).$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, la formule (2.3.2) définit une fonction φ_n holomorphe sur le demi-plan $\operatorname{Re} s > 0$ (en fait sur $\mathbb{C}$ tout entier). De plus, comme la dérivée de $n^{-s} - t^{-s}$ par rapport à t vaut s/t^{s+1}, elle satisfait sur ce demi-plan à la majoration :

$$|\varphi_n(s)| \leqslant \sup_{t \in [n, n+1]} |n^{-s} - t^{-s}| \leqslant \frac{|s|}{n^{\operatorname{Re} s + 1}}.$$

Par conséquent, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(s)$ converge normalement sur tout compact du demi-plan $\operatorname{Re} s > 0$ et y définit une fonction holomorphe. □

Joint à la proposition 2.2, le fait que ζ admette un prolongement méromorphe au voisinage de la droite $\operatorname{Re} s = 1$ va déjà nous permettre de montrer :

Proposition 2.4. *Soit $s_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} s_0 = 1$, et soit n la valuation*[2] *de ζ en s_0. La fonction holomorphe sur $\operatorname{Re} s > 1$*

$$\zeta_{\mathbb{P}}(s) - n \log(s - s_0)$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur un voisinage de s_0.

Par « log », nous entendons la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_-$.

*Démonstration**. On a, pour tout s tel que $\operatorname{Re} s > 1$:

$$\begin{aligned}\exp(\zeta_{\mathbb{P}}(s) - n \log(s - s_0)) &= (s - s_0)^{-n} \exp \zeta_{\mathbb{P}}(s) \\ &= (s - s_0)^{-n} \zeta(s) \exp(-g(s)).\end{aligned}$$

Cette fonction se prolonge en une fonction holomorphe ne s'annulant pas sur un voisinage ouvert de s_0. Sur un disque ouvert $\mathring{D}(s_0; r)$ de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$ suffisamment petit, ce prolongement s'écrit $\exp \varphi(s)$, où φ est holomorphe sur $\mathring{D}(s_0; r)$; en effet

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

est surjective et localement biholomorphe. La connexité de

$$\{s \in \mathring{D}(s_0; r) \mid \operatorname{Re} s > 1\}$$

montre alors qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que, sur cet ouvert

$$\zeta_{\mathbb{P}}(s) - n \log(s - s_0) = \varphi(s) + 2\pi i n.$$

La fonction $\varphi + 2\pi i n$ constitue le prolongement holomorphe cherché. ☐

La proposition 2.4 montre que si $t \in \mathbb{R}^*$ est tel que $1 + it$ ne soit pas un zéro de ζ, on peut considérer la limite dans $\mathbb{C}$:

$$\zeta_{\mathbb{P}}(1 + it) := \lim_{\varepsilon \to 0_+} \zeta_{\mathbb{P}}(1 + \varepsilon + it).$$

Elle permet aussi d'analyser la régularité locale de la fonction de t ainsi définie :

Corollaire 2.5. (i) *Comme fonction de t, $\zeta_{\mathbb{P}}(1 + it)$ est C^∞ sur l'ouvert*

$$\mathbb{R}^* \smallsetminus \{t_0 \in \mathbb{R}^* \mid \zeta(1 + it_0) = 0\}.$$

(ii) *Au voisinage de 0,*

$$\zeta_{\mathbb{P}}(1 + it) - \log \frac{1}{it}$$

se prolonge en une fonction C^∞ de t ;

(iii) *Si ζ admet un zéro d'ordre n en $1 + it_0$, $t_0 \in \mathbb{R}^*$, alors*

$$\zeta_{\mathbb{P}}(1 + it) + n \log \frac{1}{i(t - t_0)}$$

[2] Ainsi $n = -1$ si $s_0 = 1$, $n = 0$ si $s_0 \neq 1$ et $\zeta(s_0) \neq 0$ et $n \geqslant 1$ si $s_0 \neq 1$ et $\zeta(s_0) = 0$.

se prolonge en une fonction C^∞ de t sur un voisinage de t_0.

En particulier, $\zeta_{\mathbb{P}}(1+it)$ est une fonction localement sommable de $t \in \mathbb{R}$.

Observons que, par définition même de « log » comme détermination principale du logarithme, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$:

$$\log \frac{1}{it} = \log |t| + \frac{\pi i}{2}\varepsilon \quad \text{où } \varepsilon \text{ désigne le signe de } t.$$

2.4. Zéros de ζ, singularités de $\zeta_{\mathbb{P}}$ sur $1 + i\mathbb{R}$ et distribution des nombres premiers

On déduit aussitôt de la proposition 2.4 et de la discussion précédente :

Corollaire 2.6. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\zeta_{\mathbb{P}}$ admet un prolongement holomorphe au voisinage de $1 + it$;*

(ii) *La fonction ζ de Riemann ne possède pas de zéro sur la droite $1 + i\mathbb{R}$;*

(iii) *Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,*

$$\zeta_{\mathbb{P}}(1 + \sigma + it) = o(\log \sigma^{-1})$$

lorsque $\sigma > 0$ tend vers 0 ;

(iv) *Comme fonction de t, $\zeta_{\mathbb{P}}(1 + it)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.*

Comme mentionné dans l'introduction, les démonstrations originales du théorème des nombres premiers reposaient de façon cruciale sur le fait que ces conditions sont satisfaites, et il en va de même de toutes ses démonstrations fondées sur le développement en produit eulérien et les propriétés analytiques de ζ. Dans cette section, qui n'est pas utilisée dans la suite, nous allons montrer qu'inversement ces conditions découlent aisément du théorème des nombres premiers. Nous espérons que cela convaincra le lecteur du lien étroit qu'elles possèdent avec ce dernier, et rendra moins surprenante la stratégie de sa démonstration.

Commençons par établir un résultat élémentaire sur les séries de Dirichlet.

Lemme 2.7. *Soit $\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ une série de Dirichlet, de coefficients $a_n \in \mathbb{R}_+^*$, dont l'abscisse de convergence (absolue) σ_0 appartient à $\mathbb{R}$ et qui diverge en σ_0. Soit en outre $\sum_{n=1}^\infty b_n n^{-s}$ une série de Dirichlet, à coefficients complexes, telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1. \tag{2.4.1}$$

On a alors, lorsque $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ et que $\operatorname{Re} s$ tend vers σ_0 :

$$\Big|\sum_{n=1}^\infty b_n n^{-s} - \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}\Big| = o\Big(\sum_{n=1}^\infty a_n n^{\operatorname{Re} s}\Big).$$

On observera que (2.4.1) entraîne que l'abscisse de convergence (absolue) de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$ est inférieure ou égale à σ_0.

*Démonstration**. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > N$,

$$|b_n - a_n| \leqslant \varepsilon a_n.$$

On a alors, pour tout s tel que $\operatorname{Re} s > \sigma_0$:

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{N}(|a_n| + |b_n|)n^{-\operatorname{Re} s} + \varepsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n n^{-\operatorname{Re} s}.$$

Comme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma_0} = +\infty,$$

on a :

$$\lim_{\sigma \to \sigma_{0+}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma} = +\infty,$$

et donc

$$\lim_{\sigma \to \sigma_{0+}} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma}\Big)^{-1} \sum_{n=1}^{N}(|a_n| + |b_n|)n^{-\sigma} = 0$$

Par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 < \operatorname{Re} s - \sigma_0 < \delta \Longrightarrow \Big|\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\Big| \leqslant 2\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\operatorname{Re} s}. \qquad \square$$

La formule de sommation (1.2.3) montre que, si $\operatorname{Re} s > 1$,

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathbb{P}}(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} p^{-s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \pi(n)[n^{-s} - (n+1)^{-s}] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \pi(n) n^{-s}\Big[1 - \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{-s}\Big].\end{aligned}$$

Posons, pour $(s, n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^*$:

$$1 - \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{-s} = \frac{s}{n} + R(n, s)$$

On vérifie aisément que, lorsque s varie dans un compact K de $\mathbb{C}$, on a

$$|R(n, s)| \leqslant C_K n^{-2}, \tag{2.4.2}$$

où C_K désigne une constante ne dépendant que de K. Il vient alors, si $\operatorname{Re} s > 1$:

$$\zeta_{\mathbb{P}}(s) = s \sum_{n=1}^{\infty} \pi(n) n^{-s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \pi(n) n^{-s} R(n, s). \tag{2.4.3}$$

D'après (2.4.2), la seconde somme converge pour tout s tel que $\operatorname{Re} s > 0$, normalement sur tout compact de $\operatorname{Re} s > 0$ (observer que $\pi(n) \leqslant n$), et définit donc une fonction holomorphe sur ce demi-plan.

Pour étudier la première somme, introduisons la série de Dirichlet

$$Z(s) := \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n} \frac{1}{n^s}.$$

On vérifie immédiatement que son abscisse de convergence (absolue) vaut 1 et que, si $\operatorname{Re} s > 1$,

$$Z'(s) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 - \zeta(s).$$

Il en découle que, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, Z admet comme ζ un prolongement holomorphe sur un voisinage de $1 + it$. Comme de plus ζ possède un pôle simple en 1, avec comme résidu 1, il vient de plus :

$$Z(1+\sigma) = \log \sigma^{-1} + O(1)$$

lorsque $\sigma > 0$ tend vers 0.

Par ailleurs, le théorème des nombres premiers permet d'appliquer le lemme 2.7 aux séries de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\pi(n)}{n} \dfrac{1}{n^s}$ et $Z(s)$. On obtient ainsi que, lorsque $\operatorname{Re} s$ tend vers 1_+ :

$$\Big| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n} \frac{1}{n^s} - Z(s) \Big| = o(\log(\operatorname{Re} s - 1)^{-1}),$$

puis que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n} \frac{1}{n^{1+\sigma+it}} = o(\log \sigma^{-1})$$

lorsque $\sigma > 0$ tend vers 0.

Compte tenu de (2.4.3) et de l'holomorphie sur $\operatorname{Re} s > 0$ de la seconde somme dans (2.4.3), cela prouve que la condition (iii) du corollaire 2.6 est satisfaite.

3. La fonction $(t \mapsto \zeta_{\mathbb{P}}(1 + 2\pi i t))$ comme transformée de Fourier de la mesure $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} \delta_{\log p}$

3.1. La mesure $\mu := \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} \delta_{\log p}$

Pour analyser le lien entre la répartition des nombres premiers et les propriétés des fonctions ζ et $\zeta_{\mathbb{P}}$ sur la droite $\operatorname{Re} s = 1$, il est commode d'introduire la mesure positive sur $\mathbb{R}$

$$\mu := \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}\delta_{\log p}$$

et sa transformée de Fourier. En effet, il vient :

Proposition 3.1.

(i) *Pour tout* $\varepsilon > 0$*,*

$$\int_{\mathbb{R}} x^{-1-\varepsilon} d\mu(x) < \infty.$$

(ii) *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $\operatorname{Re}\lambda > 0$*, la fonction d'une variable réelle* $(x \mapsto e^{-\lambda x})$ *est* μ*-intégrable et*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} d\mu(x) = \zeta_{\mathbb{P}}(1+\lambda). \tag{3.1.1}$$

(iii) *Pour tout* $y \in \mathbb{R}$*,*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{x} 1_{\mathbb{R}_+}(y-x) d\mu(x) = \pi(e^y). \tag{3.1.2}$$

Démonstration.* (i) On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} x^{-1-\varepsilon} d\mu(x) &= \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}(\log p)^{-1-\varepsilon}\\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1+\varepsilon}} < \infty.\end{aligned}$$

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, il vient :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} d\mu(x) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p} e^{-\lambda \log p} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^{1+\lambda}}. \tag{3.1.3}$$

Cette somme est finie et vaut $\zeta(1+\lambda)$. Cela prouve (ii) lorsque λ est réel > 0. Comme, pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}$, on a

$$|e^{-\lambda x}| = e^{-\operatorname{Re}\lambda\cdot x},$$

cela montre aussi que $(x \mapsto e^{-\lambda x})$ est μ-intégrable lorsque $\operatorname{Re}\lambda > 0$. De plus, sous cette hypothèse la suite d'égalités (3.1.3) est encore valable, ce qui prouve (3.1.1).

(iii) On a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{x} 1_{\mathbb{R}_+}(y-x) d\mu(x) &= \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p} e^{\log p} 1_{\mathbb{R}_+}(y-\log p)\\ &= \sum_{p\in\mathbb{P}} 1_{\mathbb{R}_+}(y-\log p)\\ &= \pi(e^y).\end{aligned}$$

□

On remarquera que (i) implique que, si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi(x) = O(x^{-1-\varepsilon})$ lorsque $x \to +\infty$, alors φ est μ-intégrable. En particulier toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est μ-intégrable et la distribution définie par μ — qui, par définition, applique $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ sur $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) d\mu(x)$ — est tempérée, *i.e.* appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Comme c'est l'usage, nous noterons encore μ cette distribution.

L'identité (3.1.1) montre que — au moins formellement — la transformée de Fourier-Laplace de μ est $(\lambda \mapsto \zeta_{\mathbb{P}}(1 + 2\pi\lambda))$ et donc que la transformée de Fourier de μ est la fonction $(t \mapsto \zeta_{\mathbb{P}}(1 + 2\pi it))$. En introduisant la fonction g sur $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x) := e^{-x} 1_{\mathbb{R}_+}(x),$$

l'identité (3.1.2) peut s'interpréter — au moins heuristiquement — comme affirmant que le produit de convolution $g * \mu$ coïncide avec la fonction $(x \mapsto e^{-x}\pi(e^x))$. Comme la transformée de Fourier de g est la fonction $\widehat{g}$ définie par

$$\widehat{g}(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixt} e^{-x} 1_{\mathbb{R}_+}(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-(1+2\pi it)x} dx = \frac{1}{1 + 2\pi it},$$

cela laisse à penser que $(x \mapsto e^{-x}\pi(e^x))$ admet comme transformée de Fourier le produit $\widehat{g} \cdot \widehat{\mu}$, c'est-à-dire la fonction

$$\left(t \longmapsto \frac{\zeta_{\mathbb{P}}(1 + 2\pi it)}{(1 + 2\pi it)} \right).$$

La suite de cette section 3 a pour objet de montrer comment on peut donner une signification rigoureuse à ces assertions au moyen la théorie de la la transformation de Fourier des distributions tempérées.

3.2. La transformée de Fourier de μ au sens des distributions

Ce paragraphe a pour objet d'établir l'énoncé suivant :

Proposition 3.2. *La distribution $\widehat{\mu}$, transformée de Fourier de μ, coïncide avec la distribution associée à la fonction localement sommable $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\ell(t) = \zeta_{\mathbb{P}}(1 + 2\pi it)$.*

En d'autres termes, pour toute $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \zeta_{\mathbb{P}}(1 + 2\pi it) dt = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} \widehat{\varphi}(\log p). \tag{3.2.1}$$

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$, définissons une mesure positive μ_ε sur $\mathbb{R}$ et une fonction $\ell_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par les formules

$$\mu_\varepsilon = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^{1+\varepsilon}} \delta_{\log p} \quad \text{et} \quad \ell_\varepsilon(t) = \zeta_{\mathbb{P}}(1 + \varepsilon + 2\pi it).$$

On remarquera que μ_ε est de masse totale finie $\sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-1-\varepsilon}$ et définit *a fortiori* une distribution tempérée (notée encore μ_ε). Quant à ℓ_ε, c'est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ell_\varepsilon^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$, puisque la série de Dirichlet définissant $\zeta_\mathbb{P}$ est normalement convergente, ainsi que ses dérivées, sur chaque demi-plan $\operatorname{Re} s \geqslant 1+\varepsilon$, quand $\varepsilon > 0$.

La proposition 3.2 découle aussitôt des trois lemmes suivants, que nous démontrons plus bas. □

Lemme 3.3. *Pour tout $\varepsilon > 0$, on a :*

$$\widehat{\mu}_\varepsilon = \ell_\varepsilon.$$

En d'autres termes, pour toute $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on a

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^{1+\varepsilon}} \widehat{\varphi}(\log p) = \int_\mathbb{R} \zeta_\mathbb{P}(1+\varepsilon+2\pi i t)\varphi(t)dt. \tag{3.2.2}$$

Lemme 3.4. *Lorsque ε tend vers 0_+, μ_ε tend vers μ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.*

En d'autres termes, pour toute $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_\mathbb{R} \psi(x)d\mu_\varepsilon(x) = \int_\mathbb{R} \psi(x)d\mu(x),$$

ou encore

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^{1+\varepsilon}} \psi(\log p) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}\psi(\log p). \tag{3.2.3}$$

Lemme 3.5. *Lorsque ε tend vers 0_+, ℓ_ε tend vers ℓ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*

En d'autres termes, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_\mathbb{R} \ell_\varepsilon(t)\varphi(t)dt = \int_\mathbb{R} \ell(t)\varphi(t)dt. \tag{3.2.4}$$

Démonstration des lemmes 3.3-5.* Le lemme 3.3 — qui est en fait un avatar de la formule (3.1.1) — découle du théorème de Fubini. En effet, comme

$$\widehat{\varphi}(\log p) = \int_\mathbb{R} e^{-2\pi i t\cdot\log p}\varphi(t)dt = \int_\mathbb{R} p^{-2\pi i t}\varphi(t)dt,$$

(3.2.2) se récrit

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \int_\mathbb{R} p^{-1-\varepsilon-2\pi i t}\varphi(t)dt = \int_\mathbb{R} \sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-1-\varepsilon-2\pi i t}\varphi(t)dt.$$

Cette égalité a bien lieu puisque

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \int_\mathbb{R} |p^{-1-\varepsilon-2\pi i t}\varphi(t)|dt = \zeta_\mathbb{P}(1+\varepsilon)\|\varphi\|_{L^1} < \infty.$$

Le lemme 3.4 découle de l'uniformité en ε de la convergence de la série dans le membre de gauche de (3.2.3).

Pour établir le lemme 3.5, il suffit de vérifier que, pour tout intervalle borné $[a,b] \subset \mathbb{R}$,

$$\int_a^b |\ell_\varepsilon(t) - \ell(t)|dt = \int_a^b |\zeta_{\mathbb{P}}(1+\varepsilon+2\pi it) - \zeta_{\mathbb{P}}(1+2\pi it)|dt$$

tend vers 0 lorsque $\varepsilon > 0$ tend vers 0. Cela découle de la description locale de $\zeta_{\mathbb{P}}$ au voisinage de $1+i\mathbb{R}$ que donne la proposition 2.4 et du fait que, pour tout $s_0 \in 1+i\mathbb{R}$,

$$\int_a^b |\log(1+\varepsilon+it-s_0) - \log(1+it-s_0)|dt$$

tend vers 0 lorsque $\varepsilon > 0$ tend vers 0, comme le montre un calcul élémentaire. □

3.3. La fonction $(x \mapsto e^{-x}\pi(e^x))$ comme transformée de Fourier

Moralement, pour $y \in \mathbb{R}$ tendant vers $+\infty$, on voudrait appliquer la relation (3.2.1) à une fonction test $\varphi = f_y$ telle que

$$\widehat{f_y}(x) = e^x 1_{]-\infty,y]}(x). \tag{3.3.1}$$

En effet, d'après (3.1.2), le membre de droite de (3.2.1) vaudrait alors $\pi(e^y)$. Malheureusement, cela n'est pas possible sans précaution puisque la distribution f_y dont (3.3.1) est la transformée de Fourier est la fonction définie par

$$\begin{aligned} f_y(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ixt}e^x 1_{]-\infty,y]}(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^y e^{(1+2\pi it)x}dx \\ &= \frac{1}{1+2\pi it}e^{(1+2\pi it)y}, \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

qui n'est pas à support compact.

Écrivons toutefois la formule heuristique à laquelle conduit l'application brutale de (3.2.1) à f_y. On « obtient » au moyen de (3.2.1), (3.3.1) et (3.3.2) une expression de $(y \mapsto e^{-y}\pi(e^y))$ comme transformée de Fourier inverse « identique » à celle suggérée après la proposition 3.1 :

$$e^{-y}\pi(e^y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ell(t)}{1+2\pi it}\, e^{2\pi ity}dt \tag{3.3.3}$$

Il s'avère que cette formule de transformation de Fourier est valide « au sens des distributions ».

Proposition 3.6. *La distribution définie par la fonction* $(1+2\pi it)^{-1}\ell(t)$ *est tempérée, de transformée de Fourier inverse la fonction bornée* $(x \mapsto e^{-x}\pi(e^x))$.

En d'autres termes, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, l'identité suivante est satisfaite :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\frac{\ell(t)}{1+2\pi it}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(x)\,\frac{\pi(e^x)}{e^x}\,dx. \tag{3.3.4}$$

*Démonstration**. Soit φ une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et soit ψ l'élément de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ défini par :

$$\psi(t) := \frac{\varphi(t)}{1+2\pi it}.$$

D'après le cas particulier $y = 0$ de (3.3.1) et (3.3.2), la fonction $\widehat{f_0} := (x \mapsto e^x 1_{\mathbb{R}_-}(x))$ est la transformée de Fourier de $f_0 = (t \mapsto 1/(1+2\pi it))$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(x) &= (f_0 \cdot \varphi)^\wedge(x) = \widehat{f_0} * \widehat{\varphi}(x)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x-y)\widehat{\varphi}(y)\,dy\\ &= e^x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y} 1_{[x,+\infty[}(y)\widehat{\varphi}(y)\,dy.\end{aligned}$$

Si nous appliquons l'identité (3.2.1) à la fonction ψ, nous trouvons donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ell(t)}{1+2\pi it}\,\varphi(t)e^{2\pi ity}dt = \sum_{p\in\mathbb{P}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y} 1_{[\log p,+\infty[}(y)\widehat{\varphi}(y)dy. \tag{3.3.5}$$

Par ailleurs, pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a, par définition de la fonction π :

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} 1_{[\log p,+\infty[}(y) = \pi(e^y).$$

On obtient ainsi l'égalité cherchée (3.3.4) en permutant les signes $\sum$ et $\int$ dans le membre de droite de (3.3.5). Cette permutation est légitime, puisque $\widehat{\varphi}$ est L^1 et que, par conséquent :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{p\in\mathbb{P}} |e^{-y} 1_{[\log p,+\infty[}(y)\widehat{\varphi}(y)|dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(e^y)e^{-y}|\widehat{\varphi}(y)|dy\\ &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(y)|dy < \infty.\end{aligned}$$ □

Observons que l'on peut aussi déduire la proposition 3.6 de la proposition 3.2 en remarquant que l'opérateur différentiel linéaire

$$D : T \longmapsto T' + T$$

vérifie, pour toute distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}(DT)(t) = (1 + 2\pi it)\mathcal{F}(T)(t)$$

— en particulier, D est injectif sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ — et envoie la fonction bornée $(x \mapsto e^{-x}\pi(e^x))$ sur la distribution

$$e^{-x}\frac{d}{dx}(\pi(e^x)) = e^{-x}\sum_{p\in\mathbb{P}}\delta_{\log p} = \sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p}\delta_{\log p} = \mu.$$

En vertu du principe selon lequel la décroissance à l'infini de la transformée de Fourier d'une distribution tempérée est contrôlée par sa régularité locale, la proposition 3.6 laisse à penser que, pour déterminer le comportement asymptotique de π, il nous faut étudier la régularité locale de ℓ. Cela fait l'objet de la prochaine section.

4. Régularité de $\zeta_{\mathbb{P}}$ sur $1 + i\mathbb{R}$ et fonctions de type positif

Dans cette section, nous allons montrer le résultat fondamental suivant :

Théorème 4.1. *La distribution $\ell(t) - \log 1/it$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*

Compte tenu du corollaire 2.5, cet énoncé peut se reformuler sous la forme plus classique : *la fonction ζ de Riemann ne s'annule pas sur la droite* $\operatorname{Re} s = 1$.

La démonstration de ce théorème va s'appuyer sur le corollaire suivant de la proposition 3.2 :

Lemme 4.2. *Pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{\varphi} \geqslant 0$, on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ell(t)\varphi(t)dt \geqslant 0. \tag{4.0.1}$$

Cette inégalité, qui peut paraître triviale, conduira à des informations remarquables sur ℓ lorsqu'on l'appliquera à des fonctions-tests φ bien choisies.

4.1. Fonctions de type positif

Rappelons diverses constructions de fonctions $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telles que $\widehat{\varphi} \geqslant 0$; de telles fonctions sont souvent appelées *fonctions de type positif.*

(i) Pour toute $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, posons $\widetilde{\rho}(x) = \overline{\rho(-x)}$. On a alors

$$\widetilde{\rho} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

et

$$\widehat{\widetilde{\rho}}(x) = \overline{\widehat{\rho}(x)},$$

et donc

$$\rho * \widetilde{\rho} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

et

$$(\rho * \widetilde{\rho})^\wedge(x) = |\widehat{\rho}(x)|^2 \geqslant 0.$$

(ii) Soient $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant N} \in \mathbb{R}^N$ et $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant N} \in \mathbb{C}^N$. Posons

$$T = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \delta_{a_k} \quad \text{et} \quad \widetilde{T} = \sum_{k=1}^{N} \overline{\alpha_k} \delta_{-a_k}.$$

Il vient

$$T * \widetilde{T} = \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant N} \alpha_k \overline{\alpha_\ell} \delta_{a_k - a_\ell}$$

et

$$(T * \widetilde{T})^\wedge(x) = \Big| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e^{-2\pi i a_k x} \Big|^2 \geqslant 0.$$

Par conséquent, si $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe C^∞ à support compact et de type positif, il en va de même de

$$T * \widetilde{T} * \rho : x \longmapsto \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant N} \alpha_k \overline{\alpha_\ell} \rho(x + a_\ell - a_k).$$

En effet,

$$(T * \widetilde{T} * \rho)^\wedge = (T * \widetilde{T})^\wedge \cdot \widehat{\rho}.$$

(iii) Si $\varphi = \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe C^∞ à support compact et de type positif, il en va de même de

$$\varphi_\lambda := \frac{1}{\lambda} \varphi\Big(\frac{\cdot}{\lambda}\Big)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. En effet $\widehat{\varphi}_\lambda(x) = \widehat{\varphi}(\lambda x)$.

4.2. Démonstration du théorème 4.1

En combinant le lemme 4.2 avec les constructions (ii) et (iii) (avec $\alpha_i = 1$), nous obtenons :

Lemme 4.3. *Pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{\varphi} \geqslant 0$, tout N-uplet $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant N} \in \mathbb{R}^N$ et tout $\lambda > 0$, on a :*

$$\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant N} \int_{-\infty}^{+\infty} \ell(t + a_k - a_\ell) \varphi_\lambda(t)\, dt \geqslant 0. \tag{4.2.1}$$

Le comportement asymptotique, lorsque λ tend vers 0, de chacune des intégrales dans le membre de gauche de (4.2.1) est déterminé par l'ordre du zéro ou du pôle de ζ en $1 + i(a_k - a_\ell)$. En effet, on a :

Lemme 4.4. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit*

$$n(a) = v_{1+ia}(\zeta)$$

l'ordre du zéro de ζ en $1+ia$. Pour toute $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on a, lorsque λ tend vers 0_+ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ell(t+a)\varphi_\lambda(t)dt = -n(a)\log(\lambda^{-1})\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt + O(1).$$

Rappelons que, par définition,

$$\begin{aligned} n(a) &= -1 \ \text{ si } a = 0 \\ &= \ \ 0 \ \text{ si } a \neq 0 \text{ et } \zeta(1+ia) \neq 0 \\ &\geqslant \ \ 1 \ \text{ si } a \neq 0 \text{ et } \zeta(1+ia) = 0. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Démonstration du lemme 4.4.* D'après le corollaire 2.5, il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction f, continue et bornée sur $\mathbb{R}$, telle que, pour $t \in]a-\varepsilon,\ a+\varepsilon[$, on ait :

$$\ell(t) = -n(a)\log\frac{1}{i(t-a)} + f(t-a).$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ suffisamment petit, le support de φ_λ est inclus dans $]-\varepsilon,\varepsilon[$ et il vient donc :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \ell(t+a)\varphi_\lambda(t)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty}\Big[-n(a)\log\frac{1}{it} + f(t)\Big]\varphi_\lambda(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\Big[-n(a)\log\frac{1}{i\lambda u} + f(\lambda u)\Big]\varphi(u)du \\ = -n(a)\log(\lambda^{-1})\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)du &+ \int_{-\infty}^{+\infty}\Big[-n(a)\log\frac{1}{iu} + f(\lambda u)\Big]\varphi(u)du. \end{aligned}$$

La dernière intégrale est bornée, indépendamment de λ, par

$$|n(a)|\int_{-\infty}^{+\infty}\Big|\log\frac{1}{iu}\varphi(u)\Big|du + \sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t)| \cdot \int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(u)|du. \qquad \square$$

Choisissons maintenant $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ non nulle, telle que $\widehat{\varphi} \geqslant 0$ (il en existe bien, d'après la construction (i) ci-dessus). On a alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt > 0.$$

Reprenons les notations des lemmes 4.3 et 4.4. La somme (4.2.1) est positive, et lorsque λ tend vers 0, vaut

$$-\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant N} n(a_k - a_\ell)\cdot\log(\lambda^{-1})\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt + O(1).$$

Il en découle l'inégalité :

$$- \sum_{1 \leqslant k, \ell \leqslant N} n(a_k - a_\ell) \geqslant 0. \tag{4.2.3}$$

Cette dernière entraîne aisément le théorème 4.1, à savoir que $n(a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, compte-tenu des relations (4.2.2) et de la parité de n (pour tout $t \in \mathbb{R}$, $n(-t) = n(t)$, puisque $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\overline{s})$). En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on peut appliquer (4.2.3) à[3]

$$N = 3 \quad \text{et} \quad (a_1, a_2, a_3) = (-a, 0, a).$$

On obtient ainsi :

$$3n(0) + 4n(a) + 2n(2a) \leqslant 0,$$

puis, en utilisant (4.2.2) :

$$4n(a) + 2n(2a) \leqslant 3,$$

et enfin :

$$n(a) = 0.$$

5. Fin de la démonstration

5.1. Une version « lissée » du théorème des nombres premiers

Observons que, pour toute fonction ψ transformée de Fourier d'une fonction φ de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $(x \mapsto \psi(x - y))$ est la transformée de Fourier de $(t \mapsto e^{2\pi i t y} \varphi(t))$. En appliquant l'identité (3.3.4) à ces fonctions, on obtient ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x - y) \, \frac{\pi(e^x)}{e^x} \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ell(t)}{1 + 2\pi i t} \, \varphi(t) e^{2\pi i t y} dt. \tag{5.1.1}$$

Cette identité va nous permettre d'établir la proposition suivante, qui est une version « lissée » du théorème des nombres premiers :

Proposition 5.1. *Pour toute fonction ψ transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on a, lorsque y tend vers $+\infty$:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x - y) \frac{\pi(e^x)}{e^x} dx = \frac{1}{y} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx + o\Big(\frac{1}{y}\Big). \tag{5.1.2}$$

(3) Bien d'autres choix de $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ sont possibles, qui permettent de conclure tout aussi bien que celui-ci.

En effet, si l'on pouvait faire $\psi = \delta$ dans la proposition 5.1, on obtiendrait exactement le théorème des nombres premiers.

Pour établir la proposition 5.1, il nous faut déterminer le comportement asymptotique du membre de droite de (5.1.1) lorsque y tend vers $+\infty$. À cet effet, nous ferons appel au résultat suivant :

Lemme 5.2. *Pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a, lorsque y tend vers $+\infty$:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\log \frac{1}{it}\Big) f(t) e^{2\pi i t y} dt = \frac{1}{y} f(0) + o\Big(\frac{1}{y}\Big). \tag{5.1.3}$$

Ce lemme décrit le comportement à l'infini de la transformée de Fourier inverse de la fonction $(t \mapsto (\log 1/it) f(t))$ de $L^1(\mathbb{R})$. Pour l'établir, nous commençons par un calcul classique de transformée de Fourier :

Lemme 5.3. *La transformée de Fourier inverse de la distribution tempérée $\dfrac{d}{dt}\Big(\log \dfrac{1}{it}\Big)$ est la fonction $2\pi i \cdot 1_{\mathbb{R}_+}$.*

*Démonstration**. On a :

$$\log \frac{1}{it} = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \log \frac{1}{it + \varepsilon},$$

où la convergence a lieu dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$; par conséquent, on a, toujours dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \log \frac{1}{it} &= \lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{d}{dt} \log \frac{1}{it + \varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{i}{it + \varepsilon} =: \frac{1}{t - i0}. \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

De plus, pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathcal{F}(1_{\mathbb{R}_+}(x) e^{-\eta x})(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x t - \eta x} dx = \frac{1}{2\pi i t + \eta}.$$

En faisant tendre η vers 0, on en déduit :

$$\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{1}{t - i0}\Big) = 2\pi i \cdot 1_{\mathbb{R}_+}. \tag{5.1.5}$$

Le lemme découle de (5.1.4) et (5.1.5). □

Démonstration du lemme 5.2.* Pour calculer la fonction continue sur $\mathbb{R}$ transformée de Fourier inverse de la fonction intégrable $(t \mapsto (\log 1/it) f(t))$, on peut effectuer les calculs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ suivants :

$$\begin{aligned} 2\pi i y \mathcal{F}^{-1}\Big(\Big(\log \frac{1}{it}\Big) f(t)\Big)(y) &= -\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{d}{dt}\Big[\Big(\log \frac{1}{it}\Big) f(t)\Big]\Big)(y) \\ &= -\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{d}{dt}\Big(\log \frac{1}{it}\Big) \cdot f(t) + \Big(\log \frac{1}{it}\Big) f'(t)\Big)(y) \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

Comme $\big(t \mapsto (\log 1/it) f'(t)\big)$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$, le lemme de Riemann-Lebesgue montre que

$$\lim_{|y|\to+\infty} \mathcal{F}^{-1}\Big(\Big(\log \frac{1}{it}\Big) \cdot f'(t)\Big)(y) = 0. \tag{5.1.7}$$

En outre, d'après le lemme 5.3,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{d}{dt}\Big(\log \frac{1}{it}\Big) \cdot f(t)\Big] &= \mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{d}{dt}\Big(\log \frac{1}{it}\Big)\Big] * \mathcal{F}^{-1} f \\ &= 2\pi i 1_{\mathbb{R}_+} * \mathcal{F}^{-1} f,\end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned}\lim_{y\to+\infty} \mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{d}{dt}\Big(\log \frac{1}{it}\Big) \cdot f(t)\Big] &= \lim_{y\to+\infty} 2\pi i \int_{-\infty}^{y} \mathcal{F}^{-1} f(x) dx \\ &= 2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}^{-1} f(x) dx \\ &= 2\pi i \; f(0). \qquad (5.1.8)\end{aligned}$$

La relation à établir (5.1.3) découle de (5.1.6), (5.1.7) et (5.1.8). □

Démonstration de la proposition 5.1.* Le second membre de l'identité (5.1.1) peut encore s'écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\ell(t) - \log \frac{1}{it}\Big] \frac{\varphi(t)}{1 + 2\pi i t}\, e^{2\pi i t y} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \log \frac{1}{it} \frac{\varphi(t)}{1 + 2\pi i t}\, e^{2\pi i t y} dt.$$

Comme fonction de y, la première intégrale est la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ (puisque $\ell(t) - \log 1/it$ est C^∞ d'après le théorème 4.1) ; elle définit donc une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et est *a fortiori* $o(1/y)$. Enfin, d'après le lemme 5.2, la seconde intégrale vaut

$$\frac{1}{y}\varphi(0) + o\Big(\frac{1}{y}\Big) = \frac{1}{y} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx + o\Big(\frac{1}{y}\Big).$$ □

5.2. Du théorème des nombres premiers « lissé » au théorème des nombres premiers

Pour achever la démonstration du théorème des nombres premiers, nous allons appliquer la proposition 5.1 à des fonctions ψ qui sont des « approximations de δ ».

Choisissons ψ_1 une fonction à valeurs positives transformée de Fourier d'un élément de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(t) dt = 1$$

(il en existe, d'après la construction (i) du paragraphe 3.4). Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, posons

$$\psi_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}\psi_1\Big(\frac{t}{\lambda}\Big).$$

Ces fonctions satisfont aux mêmes conditions que ψ_1. De plus, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il vient :

$$\lim_{\lambda\to 0_+}\int_{|t|\geqslant\varepsilon}\psi_\lambda(t)dt = \lim_{\lambda\to 0_+}\int_{|t|\geqslant\lambda^{-1}\varepsilon}\psi_1(t)dt = 0$$

et

$$\lim_{\lambda\to 0_+}\int_{|t|\geqslant\varepsilon}|t|\psi_\lambda(t)dt = \lim_{\lambda\to 0_+}\lambda\int_{|t|\geqslant\lambda^{-1}\varepsilon}|t|\psi_1(t)dt = 0.$$

Si l'on fait $\psi = \psi_\lambda$ dans (5.1.2), pour tout $\varepsilon > 0$, le premier membre est minoré par

$$\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}\psi_\lambda(x-y)\frac{\pi(e^x)}{e^x}dx,$$

donc par

$$\frac{\pi(e^{y-\varepsilon})}{e^{y+\varepsilon}}\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}\psi_\lambda(x-y)dx = \frac{\pi(e^{y-\varepsilon})}{e^{y+\varepsilon}}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi_\lambda(t)dt.$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut choisir λ tel que

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi_\lambda(x)dx \geqslant 1-\varepsilon.$$

On obtient ainsi que, lorsque y tend vers $+\infty$

$$\frac{\pi(e^{y-\varepsilon})}{e^{y+\varepsilon}}(1-\varepsilon) \leqslant \frac{1}{y} + o\Big(\frac{1}{y}\Big).$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cela implique :

$$\limsup_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y}\pi(e^y) \leqslant 1. \tag{5.2.1}$$

En particulier, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\pi(e^x) \leqslant M\frac{e^x}{x+1}. \tag{5.2.2}$$

Par ailleurs, toujours lorsque $\psi = \psi_\lambda$, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $y > \varepsilon$, le premier membre de (5.1.2) est majorée par

(5.2.3)
$$\Big(\int_0^{y-\varepsilon} + \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} + \int_{y+\varepsilon}^{+\infty}\Big)\psi_\lambda(x-y)\frac{\pi(e^x)}{e^x}dx \leqslant \int_0^{y-\varepsilon}\frac{M}{x+1}\psi_\lambda(x-y)dx$$
$$+ \frac{\pi(e^{y+\varepsilon})}{e^{y-\varepsilon}}\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}\psi_\lambda(x-y)dx + \int_{y+\varepsilon}^{+\infty}\frac{M}{x+1}\psi_\lambda(x-y)dx$$

(On a utilisé (5.2.2) et la majoration triviale $\pi(e^x) \leqslant e^x$). Pour majorer la première de ces trois intégrales, on remarque que, pour tout $x \in [0, y]$,

$$\frac{1}{x+1} \leqslant \frac{y-x+1}{y+1},$$

d'après la convexité de $x \mapsto (x+1)^{-1}$. Par conséquent,

$$\int_0^{y-\varepsilon} \frac{M}{x+1} \psi_\lambda(x-y)dx \leqslant \frac{M}{y+1} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} (1+|t|)\psi_\lambda(t)dt.$$

Par ailleurs,

$$\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \psi_\lambda(x-y)dx \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\lambda(t)dt = 1$$

et

$$\int_{y+\varepsilon}^{+\infty} \frac{M}{x+1} \psi_\lambda(x-y)dx \leqslant \frac{M}{y} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \psi_\lambda(t)dt.$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut choisir λ tel que

$$\int_{|t|\geqslant\varepsilon} (1+|t|)\psi_\lambda(t)dt \leqslant \varepsilon.$$

Le membre de droite de (5.2.3) est alors majoré par

$$\frac{\pi(e^{y+\varepsilon})}{e^{y-\varepsilon}} + \frac{M\varepsilon}{y}.$$

On obtient ainsi que, lorsque y tend vers $+\infty$,

$$\frac{\pi(e^{y+\varepsilon})}{e^{y-\varepsilon}} + \frac{M\varepsilon}{y} \geqslant \frac{1}{y} + o\Big(\frac{1}{y}\Big)$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cela implique :

$$\limsup_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y}\pi(e^y) \geqslant 1. \tag{5.2.4}$$

La conjonction de (5.2.1) et (5.2.4) est le théorème des nombres premiers.

Références

[BD96] P.T. Bateman & H.G. Diamond – « A hundred years of prime numbers », *Amer. Math. Monthly* **103** (1996), no. 9, p. 729–741.

[Bon01] J.-M. Bony – *Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier*, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2001.

[Col] P. Colmez – « Arithmétique de la fonction zêta », ce volume, seconde partie.

[HW79] G.H. Hardy & E.M. Wright – *An introduction to the theory of numbers*, fifth éd., The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1979.

[Ing90] A.E. Ingham – *The distribution of prime numbers*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1990, Reprint of the 1932 original, with a foreword by R. C. Vaughan.

[Kah96] J.-P. Kahane – « Une formule de Fourier sur les nombres premiers », *Gaz. Math.* **67** (1996), p. 3–9.

[Kah97] ———, « A Fourier formula for prime numbers », in *Harmonic analysis and number theory (Montreal, PQ, 1996)*, CMS Conf. Proc., vol. 21, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, p. 89–102.

[Kor82] J. Korevaar – « On Newman's quick way to the prime number theorem », *Math. Intelligencer* **4** (1982), no. 3, p. 108–115.

[New80] D.J. Newman – « Simple analytic proof of the prime number theorem », *Amer. Math. Monthly* **87** (1980), no. 9, p. 693–696.

[Rud73] W. Rudin – *Functional analysis*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, McGraw-Hill Book Co., New York, 1973.

[Sch61] L. Schwartz – *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Enseignement des Sciences, Hermann, Paris, 1961.

[Taz02] R. Tazzioli – *Riemann, le géomètre de la nature*, Les génies de la science, Pour la Science, 2002.

[Ten95a] G. Tenenbaum – *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, second éd., Cours Spécialisés, vol. 1, Société Mathématique de France, Paris, 1995.

[Ten95b] ———, *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 46, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, Translated from the second French edition (1995) by C.B. Thomas.

[TMF97] G. Tenenbaum & M. Mendès France – *Les nombres premiers*, Que Sais-Je ?, vol. 571, Presses Universitaires de France, Paris, 1997.

[TMF00] ———, *The prime numbers and their distribution*, Student Mathematical Library, vol. 6, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000, Translated from the 1997 French original by Philip G. Spain.

[Wei89] A. Weil – « Prehistory of the zeta-function », in *Number theory, trace formulas and discrete groups (Oslo, 1987)*, Academic Press, Boston, MA, 1989, p. 1–9.

[Zag97] D. Zagier – « Newman's short proof of the prime number theorem », *Amer. Math. Monthly* **104** (1997), no. 8, p. 705–708.

[Zui02] C. Zuily – *Introduction aux distributions et aux équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 2002.

J.-B. Bost, Université Paris-Sud, Département de mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay, France • *E-mail :* `Jean-Benoit.Bost@math.u-psud.fr`

Appendice : La non-annulation de ζ sur la droite $\operatorname{Re} s = 1$, d'après Hadamard

Nous reproduisons ci-dessous la note de Hadamard, présentée à l'Académie des Sciences de Paris le 22 juin 1896, où il démontre la non-annulation de ζ sur la droite $\operatorname{Re} s = 1$, avant d'esquisser comment s'en déduit le théorème des nombres premiers.