Conhecimento Incerto

Profa. Josiane M. P. Ferreira

Texto base:

Stuart Russel e Peter Norving - “Inteligência Artificial” - cap 13.
David Poole, Alan Mackworth e Randy Goebel - “*Computational Intelligence – A logical approach*” - cap 10.

setembro/2007

Usando conhecimento incerto

- Agentes **não** tem conhecimento completo sobre o mundo.
- Agentes necessitam fazer decisões baseadas na incerteza deles sobre o mundo.
- Supor como o mundo é não é o bastante.
  - <u>Exemplo</u>: colocar o sinto de segurança.
- Um agente necessita raciocinar sobre esta incerteza.
- Quando um agente faz um ação sobre incerteza ele está apostando => probabilidade.

Probabilidade

- Probabilidade é a medida de crença de um agente em alguma proposição – **probabilidade subjetiva**.
- Exemplo: A probabilidade de um pássaro voar é medida de crença do agente na habilidade de voar de um indivíduo, baseado somente no conhecimento de que o indivíduo é um pássaro.
  - Outros agentes podem ter diferentes probabilidades.
    - Eles podem ter tido diferentes experiências com pássaros ou diferentes conhecimentos sobre este pássaro em particular.
  - A crença de uma agente na habilidade de um pássaro voar é afetada pelo que o agente conhece sobre aquele pássaro.

Probabilidade subjetiva – exemplo

- Três agentes: *A*, *B* e *C* e um dado que foi lançado
- Supõe que *A* observa que o resultado é “6” e conta a *B* que o resultado é par, mas *C* não sabe de nada.
- Neste caso:
  - *A* tem uma probabilidade = 1 do resultado ser “6”.
  - *B* tem uma probabilidade = 1/3 do resultado ser “6”.
  - *C* tem uma probabilidade = 1/6 do resultado ser “6”.
- Eles têm diferentes probabilidades porque têm diferentes conhecimentos.

Medidas de crença numéricas

- A crença em uma proposição, *f*, pode ser medida em termos de um número entre 0 e 1 – esta é a **probabilidade de *f***.
  - A probabilidade *f* = 0 significa que acredita-se que *f* seja definitivamente falsa.
  - A probabilidade *f* = 1 significa que acredita-se que *f* seja definitivamente verdadeira.
- Usar 0 e 1 é puramente uma convenção.
- *f* ter uma probabilidade entre 0 e 1 **não** significa que *f* é verdadeira em algum grau, mas que o agente é ignorante sobre o seu valor verdade.
  - Probabilidade é uma medida da ignorância do agente.

Variáveis randômicas (ou aleatória)

- Uma **variável randômica** é um termo na linguagem que pode assumir uma quantidade de valores diferentes.
- O **domínio** de uma variável *X*, escrito como *dom*(*X*), é o conjunto de valores que *X* pode assumir.
  - Os elementos do domínio de *X* são exclusivos e exaustivos.
  - Exemplo: a variável *Cárie* tem como domínio *dom*(*true*, *false*).
  - De acordo com o domínio, uma variável randômica pode ser **booleana**, **discreta** ou **contínua**.

Tipos de variáveis randômicas

- **Booleanas**: tem o domínio <*true, false*>.
  - Normalmente *Cárie* = *true* é escrito somente *cárie* e *Cárie* = *false* como ~*cárie*
- **Discretas**: admitem valores de um domínio enumerável.
  - Exemplo: a variável *Tempo* pode ter um domínio como *dom(ensolarado, chuvoso, nevoento, nublado)*
- **Contínuas**: assumem valores a partir dos números reais.
  - O domínio pode ser a linha real inteira ou um intervalo como [0, 1].
  - Exemplo: *X* = 4,02 afirma que a variável randômica X tem o valor exato 4,02.

Variáveis randômicas complexas

- Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis randômicas.
- Uma tupla de variáveis randômicas $\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ é uma **variável randômica complexa**.
- O domínio da variável randômica complexa é o produto cartesiano dos domínio de seus componentes:
  - $dom(\langle X_1, \ldots, X_n \rangle) = dom(X_1) \times \ldots \times dom(X_n)$.
  - A tupla sempre é escrita como $X_1, \ldots, X_n$.
- Uma **proposição** é uma fórmula booleana feita das associações de valores a variáveis.

Variáveis randômicas complexas - exemplo

- Suponha um sistema de diagnóstico médico onde existem *n* possíveis doenças que o paciente pode ter ou não.
- A variável randômica que representa o estado do paciente associa uma das 2^n doenças complexas ao paciente.
  - $\mathit{EstadoPaciente} = \langle \mathit{Gripe}, \mathit{Resfriado}, \mathit{Pneumonia} \rangle$
  - $\langle \mathit{Gripe}, \mathrm{Resfriado}, \mathit{Pneumonia} \rangle = \langle \mathit{False}, \mathit{False}, \mathit{False} \rangle$
  - $\langle \mathit{Gripe}, \mathit{Resfriado}, \mathit{Pneumonia} \rangle = \langle \mathit{True}, \mathit{False}, \mathit{False} \rangle$
  - $\langle \mathit{Gripe}, \mathit{Resfriado}, \mathit{Pneumonia} \rangle = \langle \mathit{False}, \mathit{True}, \mathit{False} \rangle$
  - $\langle \mathit{Gripe}, \mathit{Resfriado}, \mathit{Pneumonia} \rangle = \langle \mathit{True}, \mathit{True}, \mathit{False} \rangle$
  - $\langle \mathit{Gripe}, \mathit{Resfriado}, \mathit{Pneumonia} \rangle = \langle \mathit{False}, \mathit{False}, \mathit{True} \rangle$
  - $\langle \mathit{Gripe}, \mathit{Resfriado}, \mathit{Pneumonia} \rangle = \langle \mathit{True}, \mathit{False}, \mathit{True} \rangle$
  - $\langle \mathit{Gripe}, \mathit{Resfriado}, \mathit{Pneumonia} \rangle = \langle \mathit{False}, \mathit{True}, \mathit{True} \rangle$
  - $\langle \mathit{Gripe}, \mathit{Resfriado}, \mathit{Pneumonia} \rangle = \langle \mathit{True}, \mathit{True}, \mathit{True} \rangle$

Semântica dos mundos possíveis

- Um **mundo possível** é uma associação de exatamente um valor para cada variável randômica.
- Seja Ω o conjunto de todos os mundo possíveis.
- Se $w \in \Omega$ e *f* é uma fórmula, *f* é verdadeiro em w (escrito como $w \models f$) é definido como:
  - $w \models X = x$ se w associa o valor x para a variável *X*.
  - $w \models f \wedge g$ se $w \models f$ e $w \models g$.
  - $w \models f \vee g$ se $w \models f$ ou $w \models g$.
  - $w \models \neg f$ se $w \not\models f$.

Semântica de probabilidade: caso finito

- Para um número finito de mundos possíveis:
  - Define uma medida não negativa $\mu(w)$ para cada conjunto de mundos w de forma que a medida dos mundos possíveis some 1.
    - A medida especifica quanto o agente pensa que o mundo w é semelhante ao mundo real.
  - A **probabilidade da proposição *f*** é definida por:

$$P(f) = \sum_{w \models f} \mu(w)$$

Axiomas de probabilidade: caso finito

- Quatro axiomas definem o que segue de um conjunto de probabilidades:
  - **Axioma 1**: $P(f) = P(g)$ se $f \leftrightarrow g$ é uma tautologia.
    - Isto é, se f e g são logicamente equivalentes, elas tem a mesma probabilidade.
  - **Axioma 2**: $0 \leq P(f)$ para qualquer fórmula f.
  - **Axioma 3**: $P(\tau) = 1$ se τ é uma tautologia.
  - **Axioma 4**: $P(f \vee g) = P(f) + P(g)$ se $\neg(f \wedge g)$ é uma tautologia.
    - f e g são mutuamente exclusivos.
    - A probabilidade da disjunção pode ser calculada pela soma da probabilidade dos disjuntos.
- Estes axiomas são corretos e completos com respeito à semântica.

Axiomas de probabilidade: caso finito

- Negação de uma proposição:
  - $P(\neg f) = 1 - P(f)$.
- Raciocinando por casos:
  - $P(f) = P(f \wedge g) + P(f \wedge \neg g)$.
- Se v é uma variável randômica com domínio D, então para todas as fórmulas f,

  $$P(f) = \sum_{d \in D} P(f \wedge v = d).$$

- Disjunção para disjuntos não exclusivos:
  - $P(f \vee g) = P(f) + P(g) - P(f \wedge g)$.

Distribuição de probabilidade

- A **distribuição de probabilidade** sobre uma variável randômica *X* é uma função *dom*(*X*) → [0, 1]
  - É a probabilidade para todos os valores que *X* pode assumir (domínio).
  - Exemplo: suponha a variável randômica *Tempo*. A distribuição de probabilidade para tempo P(*Tempo*) é:
    - P(*Tempo=ensolarado*) = 0,7
    - P(*Tempo=nublado*) = 0,08
    - P(*Tempo=chuvoso*) = 0,2
    - P(*Tempo=nevoento*) = 0,02
- Isto também inclui o caso onde temos tuplas de variáveis (distribuição de probabilidade conjunta).
  - Por exemplo: *P*(*X, Y, Z*) significa *P(⟨X, Y, Z⟩)*.

Distribuição de probabilidade Conjunta

- Exemplo: *P*(*Tempo, Carie*)

P(*Tempo=ensolarado, carie*) = 0,3

P(*Tempo=chuvoso, carie*) = 0,06

P(*Tempo=nublado, carie*) = 0,1

P(*Tempo=nevoento, carie*) = 0,04

P(*Tempo=ensolarado, ~carie*) = 0,2

P(*Tempo=chuvoso, ~carie*) = 0,04

P(*Tempo=nublado, ~carie*) = 0,2

P(*Tempo=nevoento, ~carie*) = 0,06

Distribuição de Probabilidade Conjunta (Tempo e Cárie)					
		Tempo			
		Ensolarado	Chuvoso	Nublado	Nevoento
Cárie	VERDADEIRO	0,3	0,06	0,1	0,04
	FALSO	0,2	0,04	0,2	0,06

Exercícios:
Calcule as seguintes probabilidades

- Sabendo-se que P(*Tempo*, *Carie*) =

P(*Tempo=ensolarado, carie*) = 0,3 P(*Tempo=ensolarado, ~carie*) = 0,2

P(*Tempo=chuvoso, carie*) = 0,06 P(*Tempo=chuvoso, ~carie*) = 0,04

P(*Tempo=nublado, carie*) = 0,1 P(*Tempo=nublado, ~carie*) = 0,2

P(*Tempo=nevoento, carie*) = 0,04 P(*Tempo=nevoento, ~carie*) = 0,06

- Calcule:
  - P(*Tempo=chuvoso*)
  - P(*carie*)
  - P(*~carie*)
  - P(*Tempo=nublado* ∧ *carie*)
  - P(*Tempo=nublado* ∨ *carie*)

Condicionamento

- **Probabilidade condicional** especifica como revisar crenças baseadas em uma nova informação.
- O agente constrói um modelo de probabilidade levando em consideração toda a informação passada *h*.
  - Isto lhe dá a **probabilidade a priori** P(*h*).
- Qualquer outra informação deve ser condicionada sobre *h*.
- Se a **evidência** ***e*** é a informação obtida subseqüentemente a ***h***, a **probabilidade condicional** $P(h|e)$ de *h* dado *e* é a **probabilidade posterior** de *h*.
  - A formula *e* é a conjunção de todas as observações do agente sobre o mundo.

Condicionamento – exemplo

- Assistente de diagnóstico:
  - Os sintomas do paciente serão as evidências.
  - As distribuições de probabilidade sobre as possíveis doenças são usadas antes do sistema ver ou conhecer qualquer coisa sobre o paciente.
    - Exemplo: P(meningite) = 0,02.
- A distribuição de probabilidade posterior é a probabilidade que o sistema usa depois de ter conseguido alguma evidência.
  - A probabilidade posterior é a medida conhecimento do sistema.
    - Exemplo: P(meningite | febre) = 0,12.
  - Quando surgirem observações de sintomas, ou resultados de exames, o sistema pode mudar a probabilidade posterior para refletir a nova evidência.
    - Exemplo: P(meningite | febre $\wedge$ rigidezpescoço) = 0,8.

Semântica da probabilidade condicional

- A evidência *e* descarta os possíveis mundos incompatíveis com *e*.
- A evidência *e* induz a uma nova medida, μ_e, sobre os possíveis mundos

$$\mu_e(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{P(e)} \times \mu(\omega) & \text{if } \omega \models e \\ 0 & \text{if } \omega \not\models e \end{cases}$$

- A probabilidade condicional da fórmula *h* dado a evidência *e* é

$$\begin{aligned} P(h|e) &= \sum_{\omega \models h} \mu_e(w) \\ &= \frac{P(h \wedge e)}{P(e)} \end{aligned}$$

Exercícios:
Calcule as seguintes probabilidades

Pássaro	***Inseto***	***Jovem***	**Prob**
T	T	T	0,0
T	T	F	0,2
T	F	T	0,04
T	F	F	0,01
F	T	T	0,01
F	T	F	0,01
F	F	T	0,23
F	F	F	0,5

- P(~pássaro | inseto)
- P(jovem | inseto)
- P(jovem | ~inseto)

Propriedades da probabilidade condicional

- Regra da cadeia:

$$
\begin{aligned}
& P(f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n) \\
& \quad = \quad P(f_1) \times P(f_2|f_1) \times P(f_3|f_1 \wedge f_2) \\
& \quad \qquad \times \cdots \times P(f_n|f_1 \wedge \cdots \wedge f_{n-1}) \\
& \quad = \quad \prod_{i=1}^{n} P(f_i|f_1 \wedge \cdots \wedge f_{i-1})
\end{aligned}
$$

Teorema de Bayes

- Nos diz com modificar a crença em *h* dado que uma evidência *e* é acumulada.
- Da regra da cadeia e da comutatividade da conjunção (*h* ^ *e* é equivalente a *e* ^ *h*) temos:

$$\begin{aligned} P(h \wedge e) &= P(h|e) \times P(e) \\ &= P(e|h) \times P(h). \end{aligned}$$

- $P(e) \neq 0$, podemos dividir o lado direito por $P(e)$:

$$P(h|e) = \frac{P(e|h) \times P(h)}{P(e)}.$$

- Este é o **Teorema de Bayes**.

Por que o teorema de Bayes é interessante?

- Sempre que temos conhecimento causal:
  - *P*(*sintoma* | *doença*)
  - *P*(*luz está desligada* | *estado das chaves e posições das chaves*)
  - *P*(*alarme* | *fogo*)

- E queremos raciocinar sobre a evidência:
  - *P*(*doença* | *sintoma*)
  - *P*(*estado das chaves* | *luz está desligada e posição das chaves*)
  - *P*(*fogo* | *alarme*).